MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2007./ 2008. je 60 kn, pojedini broj stoji 15 kn.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/ III, 10001 Zagreb,
tel./ fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kn),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http:/ / www.math.hr/ mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Tiskara Zelina d.d., Sv. Ivan Zelina, Ul. Katarine Krizmanić 1
Naklada ovog broja 3000 primjeraka

Slika na naslovnici prikazuje sonogram fetusa dobiven primjenom ultrazvučne tehnike, kojom se može odrediti da je fetus star 24 tjedna, da mu je duljina bedrene kosti 4.25 cm, opseg abdomena 18.8 cm, itd. Izvor ispitnog te primatelj odbijenog ultrazvučnog signala u uređaju je piezoelektrični materijal. Ljubaznošću dr. Slobodana Mitrovića (California Institute of Technology).

Dragi čitatelji!

Početak je nove školske godine i vjerujemo se da ćete u novom, prvom ovogodišnjem broju Matematičko-fizičkog lista, naći niz zanimljivosti iz matematike, fizike i astronomije.

U medicini se koristi uređaj za ultrazvučnu dijagnostiku kojim se mogu dobiti precizne slike svih mekih tkiva u ljudskom organizmu. Podmornice i brodovi za navigaciju koriste uređaj sonar za detekciju podvodnih objekata. Mikroskopska tehnika služi za precizno proučavanje površina materijala na skali veličina atoma. O *piezoelektričnom efektu* i *piezoelektričnim materijalima*, kao osnovnoj poveznici ovih složenih uređaja upoznaje nas Marko Budimir, postdoktorand u *Laboratoriju za keramike*, École Polytechnique Féderale de Lausanne u Švicarskoj.

Svake godine se održavaju stručno-metodički skupovi za učitelje i nastavnike matematike, na kojima redovito sudjeluje i profesor Petar Vranjković iz Gimanzije u Zadru. Ukazala se potreba da se analizira rješavanje kompleksnih zadataka, pa je on jednom prigodom priredio predavanje, a potom i prilog za list, o simetričnim polinomima i mogućim primjenama. Predrag Lončar, predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu, u prilogu Primjena majorizacije u trigonometriji, opisuje tu metodu i ilustrira je na nizu primjera. Tu je još i zanimljiv članak, Geometrijski dokazi nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine, profesora u mirovini, Anđelka Marića, dugogodišnjeg suradnika ovog lista.

Dino Sejdinović iz Bristola u Ujedinjenom Kraljevstvu u prilogu iz informatike, Quine: samoreproducirajući kod, piše o programu kojim ispisuje svoj vlastiti kod.

U rubrici *Iz moje radionice i laboratorija*, profesor Josip Paić iz Šibenika u prilogu Određivanje Lorenzovog broja metala, opisan je eksperiment kojim se u školskom laboratoriju može može odrediti spomenuti broj.

Matko Milin s Fizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu otkriva tajne zvijezde Mira koja je od Zemlje udaljena 420 svjetlosnih godina, a privlači pažnju astronoma već više od četiri stoljeća.

Tu su prilozi o 10. mediterenskom matematičkom natjecanju i 49. državnom susretu i natjecanju mladih matematičara Republike Hrvatske. U Labinu je početkom ljeta održana 23. ljetna škola mladih fizičara na kojoj su učenici slušali brojna zanimljiva predavanja, a uz to izvodili i razne eksperimente.

Nedavno nas je zauvijek napustio naš uvaženi profesor, fizičar i filozof, jedan od začetnika Instituta "Ruđer Bošković", redoviti član HAZU-a, Ivan Supek, o kojem piše njegov bivši student, akademik Ksenofont Ilakovac.

Na zadnjoj strani omota prisjetili smo se akademika Krunoslava Ljolje, s Katedre za matematiku i fiziku Filozofskog fakulteta u Sarajevu.

Uredništvo lista



Piezoelektrični efekt u feroelektričnim materijalima

Marko Budimir[1], *Lausanne, Švicarska*

Većina nas čula je za uređaj za ultrazvučnu dijagnostiku. Takvim uređajem mogu se dobiti precizne slike svih mekih tkiva u ljudskom organizmu, poput mišića, tetiva, ili srca kako kuca (sonogrami nisu samo statični), te vizualizirati njihovu veličinu, strukturu i moguće nepravilnosti uzrokovane bolešću ili ozljedom. Ultrazvučna dijagnostika se također koristi i za promatranje fetusa prilikom rutinskih ili hitnih kontrola žena tijekom trudnoće (slika na naslovnici). Njom se mogu uz veliku vjerojatnost dijagnosticirati stadij trudnoće, vitalnost i položaj fetusa, broj fetusa u višestrukoj trudnoći, krupnije tjelesne anomalije, ili odrediti spol. Primjenjivost ultrazvuka u biomedicinske svrhe ne zaustavlja se ovdje – koristi se i u tretiranju tumora, u stomatologiji za čišćenje zubi, za razbijanje kamenaca u bubrezima, u fizikalnoj terapiji. . .

Većina nas također je čula i za sonar – (ultra)zvučnu tehniku koju koriste podmornice i brodovi za navigaciju, komunikaciju te detekciju podvodnih objekata, kao što su druga plovila ili jata riba. Neki su pak čuli za najnoviju generaciju ubrizgavača goriva u dizelskim agregatima renomiranih proizvođača automobila (BMW, Mazda, Jaguar) koji su značajno poboljšali učinkovitost motora. Rijetki su čuli i za mikroskop atomske sile – AFM[2] (Atomic Force Microscopy), vrlo poznatu i cijenjenu mikroskopsku tehniku za precizno proučavanje površina materijala na skali veličine atoma (10^{-9} m). Ta tehnika spada u širu grupu mikroskopskih metoda zvanu SPM (Scanning Probe Microscopy), odnosno mikroskopija skenirajućom probom, a ta grana mikroskopije je bila jedna od prvih koraka u istraživanju nanotehnologija.

Osnovna poveznica navedenih složenih uređaja je da se oslanjaju na korištenje *piezoelektričnih materijala*. U spomenutim medicinskim tehnikama i sonarima baš će piezoelektrični materijal biti izvor i primatelj ultrazvučnih valova, u AFM-u će piezoelektrična cjevčica služiti za pravilno pozicioniranje isturene iglice mikroskopa tijekom eksperimenata, te konačno, potisak u ubrizgivačima goriva će biti ostvaren deformacijom piezoelektričnog materijala.

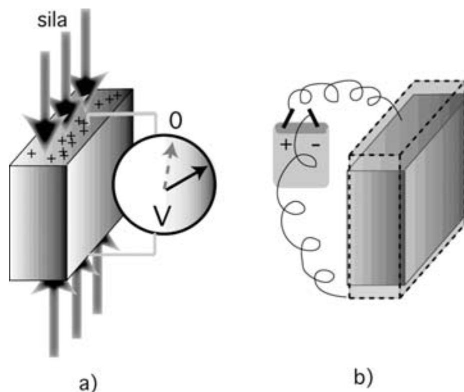
Što je uopće *piezoelektrični efekt*?

Ako na piezoelektrični materijal primijenimo *mehaničku silu* (tlak, vlak ili smik), na površinama materijala nakupit će se *električni naboj* (slika 1). Taj efekt je različit od

[1] Autor je postdoktorant u *Laboratoriju za keramike*, École polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Švicarska, `marko.budimir@epfl.ch`.

[2] AFM posjeduje mali kantilever s isturenom iglicom na vrhu, kojim se skenira površina uzorka. Kantilever je tipično napravljen od silicija ili silicijevog nitrida. Vrh isturene iglice je zaobljen, a polumjer zakrivljenja vrha je reda veličine nanometra. Kad se iglica dovede u blizinu površine uzorka, sile koje će djelovati između iglice i uzorka će, prema Hookeovom zakonu, savijati kantilever, a to će se savijanje mjeriti promatranjem laserske zrake koja će se odbijati od vrha kantilevera. Odbijena zraka skupljat će se fotodiodama, a kut odbijanja će ovisiti o silama na koje kantilever nailazi gibajući se po površini uzorka. Proučavanje sila na uzorkovoj površini onda otkriva njenu atomsku strukturu i reljef.

onog u pretežito elastičnim materijalima, gdje će mehanička sila prouzročiti uglavnom promjene u dimenzijama (poznati Hookeov zakon), ili pak u izrazito dielektričnim materijalima, gdje se najveći dio električnog naboja po površinama materijala akumulira gotovo isključivo primjenom električnog polja. Piezoelektrični efekt je kvalitativno drugačiji – on *veže* mehanička i električna svojstva u materijalu.



Slika 1. Piezoelektrični efekt: a) primjenom mehaničke sile na piezoelektrični materijal, nakuplja se električni naboj na njegovim površinama koji se može izmjeriti kao napon među površinama – to je direktni piezoelektrični efekt; b) narinućem napona na piezoelektrični materijal, on se deformira – to je recipročni piezoelektrični efekt.

Efekt je dvosmjeran – osim što je moguće stvoriti električni naboj primjenom mehaničke sile, što nazivamo *direktnim piezoelektričnim efektom*, moguće je i mijenjati dimenzije materijala primjenom električnog polja, tj. narinućem napona na materijal, što je poznato kao *recipročni piezoelektrični efekt*. Sve se to može jednostavno prikazati tzv. *vezujućim jednadžbama*

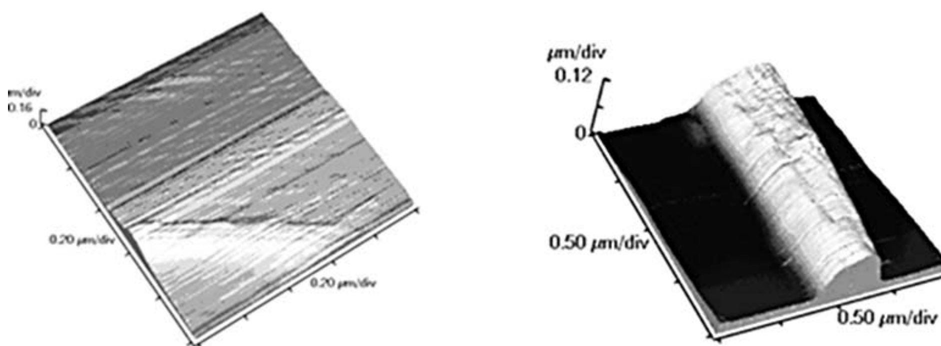
$$x = s^E \cdot \sigma + d_r \cdot E, \quad \text{i}$$
$$D = d_d \cdot \sigma + \varepsilon^\sigma \cdot E.$$

One kažu da se deformacija piezoelektričnog materijala, x, može prouzročiti i mehaničkom silom, σ, i električnim poljem, E, dok se naboj na površini materijala, opisan dielektričnim pomakom, D, može također nakupiti i mehaničkim i električnim silama i poljima. Vrijednost s^E je konstanta elastičnosti izmjerena bez prisustva električnog polja, a ε^σ je dielektrična konstanta u odsutnosti mehaničkih sila. Konačno, d_d i d_r su *direktni* i *recipročni piezoelektrični koeficijent*. Mjerne jedinice za piezoelektričnost su Coulomb po Newtonu (C/ N) za direktni piezoelektrični efekt, gdje sila uzrokuje nakupljanje naboja, ili metar po Voltu (m/ V) za recipročni efekt, gdje električni napon (polje) uzrokuje deformaciju materijala. Tipične deformacije u piezoelektričnim materijalima su reda veličine 100 pikometara ($1 \text{ pm} = 10^{-12}$ m) za 1 V narinutog napona. Važna je činjenica da se unutar termodinamičke teorije može pokazati da su direktni i recipročni piezoelektrični koeficijenti iznosom *jednaki*, $d_d = d_r$.

Iz ovih jednadžbi intuitivno je jasno da je djelovanjem izmjeničnog napona na piezoelektrik moguće natjerati materijal da titra npr. ultrazvučnim frekvencijama. Isto tako ultrazvučni signal reflektiran od proučavanog objekta moguće je uz pomoć piezoelektrika pretvoriti u električni signal koji se naknadno analizira. Da bi spomenuti uređaji bili što kvalitetniji, precizniji, učinkovitiji, a i jeftiniji, osim što je jako važno usavršiti tehničke i inženjerske detalje, za svaku pojedinu primjenu potrebno je imati i

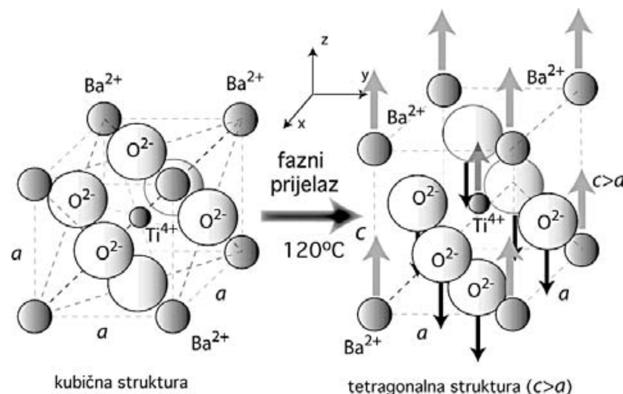
piezoelektrične materijale optimalnih osobina. U tom dijelu posla glavnu ulogu preuzima znanost o materijalima. To je interdisciplinarna znanstvena grana koja u sebi ispreplić́e fiziku, kemiju, matematiku i inženjerstvo.

Piezoelektrični materijali postoje, i primjenjuju se, u različitim oblicima: u monokristalnom obliku, u polikristalnom obliku keramika, u obliku tankih filmova te čak i malih piezoelektričnih nanocijevi (slika 2). Neke od takvih materijala možemo pronaći u prirodi, kao što su kvarc (SiO_2), turmalin, šećerna trska, ili Rochelle sol $(KNaC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O)$, a neki su sintetizirani u laboratorijama. Najpoznatiji primjeri umjetnih piezoelektrika su barijev titanat $(BaTiO_3)$, olovni titanat $(PbTiO_3)$, kalijev niobat $(KNbO_3)$, ili pak u industriji trenutno vrlo korišteni olovni cirkonij titanat, $PbZr_xTi_{1-x}O_3$, poznatiji kao PZT (u ovom materijalu piezoelektrični koeficijent može doseći vrijednost od 500 pm/ V, dok je u kvarcu on samo 2 pm/ V). Za istaknuti je da svi ovdje spomenuti sintetski materijali imaju istu općenitu kemijsku formulu, ABO_3, te istu kristalnu strukturu koja se naziva perovskitna kristalna struktura. Ta nekomplicirana struktura čini perovskite jako prikladnim i privlačnim za eksperimentalno i teorijsko proučavanje, jer u isto vrijeme obitelj tih materijala pokazuje čitav spektar zanimljivih svojstava kao što su već spomenuta piezoelektričnost, ali i feroelektričnost, piroelektričnost, a nekad čak i supravodljivost.



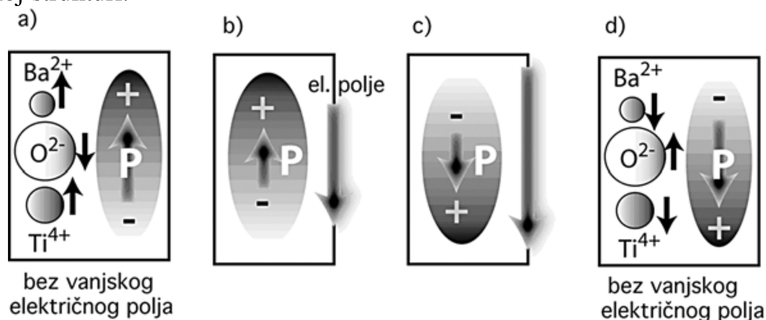
Slika 2. Topografski 3D prikaz piezoelektrične nanocjevčice. Slike dobivene mikroskopom atomske sile (AFM). Ljubaznošću Jin Wanga (Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne).

Nabrojeni perovskitski materijali, osim što su piezoelektrični, su i *piroelektrični* i *feroelektrični*. Piroelektričnost i feroelektričnost su vezane uz pojavu *spontane polarizacije* u tim materijalima. Što podrazumijevamo pod pojmom spontana polarizacija? Krenimo redom. Atomi u kristalima raspoređuju se u strukture koje imaju najniže energetsko stanje za dane uvjete (kao što su temperatura materijala, ili tlak koji djeluje na materijal). To znači da je moguće da materijali *iste* kemijske formule imaju kvalitativno *različite* strukture na različitim temperaturama i pod različitim tlakovima, jer se pri promjeni uvjeta može promijeniti i energetski najpovoljnija struktura. Strukture nazivamo *fazama*, a prijelazi među njima, koji se mogu zbiti promjenom temperature ili tlaka, *faznim prijelazima*. Primjer faznog prijelaza u barijevom titanatu, uzrokovanog promjenom temperature pri atmosferskom tlaku, prikazan je na slici 3.



Slika 3. Fazni prijelaz u perovskitnoj strukturi barijevog titanata. Iznad 120 °C struktura je kubična (ioni barija su u vrhovima kocke, kisikovi ioni na presjecištima plošnih dijagonala, a ion titana na presjecištu prostornih dijagonala). U tom slučaju središte raspodjele pozitivnog naboja poklapa se sa središtem negativnog naboja, te tako u strukturi nema polarizacije. Sniženjem temperature ispod 120 °C kubična struktura više neće imati najpovoljnije energetsko stanje, nego će se ioni titana i barija translatirati duž osi z prema gore, a ioni kisika duž iste osi prema dolje, stvarajući tako tetragonalnu kristalnu strukturu (stranica uzduž osi z više nije jednaka drugim dvjema). U tom slučaju središta pozitivnih i negativnih atoma više se ne preklapaju te u strukturi postoji spontana polarizacija. Daljnjim sniženjem temperature u ovom materijalu desit će se još dva fazna prijelaza. Fizika faznih prijelaza koja opisuje razloge za promjene strukture jako je složena.

U tetragonalnoj fazi barijevog titanata pozitivni atomi će se pomaknuti u jednom, a negativni u suprotnom smjeru, tako spontano stvarajući polarizaciju koja nije postojala u kubičnoj strukturi.



Slika 4. Shematski prikaz primjene električnog polja na barijev titanat u tetragonalnoj fazi: a) materijal posjeduje spontanu polarizaciju, u ovom slučaju usmjerenu prema "gore"; b) primjena električnog polja u smjeru suprotnom od polarizacije smanjivat će iznos polarizacije kako iznos polja raste; c) sve dok električno polje ne prijeđe kritičnu vrijednost nakon koje će doći do skokovite inverzije smjera polarizacije te će ona pokazivati "dolje"; d) nakon što se polarizacija okrenula u suprotni smjer, ona će ostati tako usmjerena i nakon ukidanja vanjskog polja. Sve je ovo, naravno, moguće sada ponoviti narinućem polja u suprotnom smjeru. Čitateljima bliskim informatici bit će intuitivno jasno da je ovo "bistabilno" stanje (polarizacija "gore" i polarizacija "dolje") privlačno za korištenje u industriji računalnih memorija, koje zapisuju podatke u binarnom brojevnom sustavu.

Materijali u kojima postoji spontana polarizacija definiraju se kao *piroelektrični*, dok se *feroelektričnima* nazivaju oni u kojima također postoji spontana polarizacija, ali je dodatno svojstvo da se njen smjer može mijenjati primjenom električnog polja (slika 4). Na taj način svi feroelektrični materijali spadaju u piroelektrične, dok svi piroelektrični materijali nisu feroelektrični jer postoje i materijali u kojima nije moguće električnim poljem mijenjati smjer polarizacije, iako ona u materijalu postoji. Primjer je cinkov oksid (ZnO).

Svi piezoelektrični perovskiti koje smo nabrojali posjeduju spontanu polarizaciju na sobnoj temperaturi i pri atmosferskom tlaku (kao što smo već spomenuli, ti materijali su i piroelektrični i feroelektrični), te svi imaju više od jedne moguće faze. Piezoelektričnost i feroelektričnost su stoga usko vezane, pa je za dobro poznavanje piezoelektričnih materijala nasušno dobro poznavati i fiziku feroelektričnosti i faznih prijelaza.

Lako je pretpostaviti da svaki od tih materijala ima različite vrijednosti piezoelektričnih, dielektričnih i elastičnih konstanti, a važno je napomenuti da te vrijednosti jako ovise o mnoštvu čimbenika, a ovdje spominjemo samo nekoliko važnijih:

a) o obliku u kojem se materijal nalazi (tanki film debljine nekoliko stotina nanometara ili blok veličine nekoliko centimetara istog materijala neće pokazivati ista svojstva, monokristalna ili keramička forma istog kemijskog spoja također će se međusobno drugačije ponašati pri istim uvjetima);

b) o načinu na koji je materijal sintetiziran (postoje razne metode rasta kristala i sinteze keramika);

c) o smjeru u kojem mjerimo ili koristimo svojstva unutar materijala; ako primijenimo električno polje u dva različita smjera u piezoelektričnom materijalu, nećemo dobiti jednako velike deformacije – to se naziva *anizotropija* svojstava.

Za pronaći materijale visoke kvalitete i objasniti složene fizikalne procese koji im daju svojstva nije onda teško zamisliti laboratorij s mnoštvom znanstvenika i tehničara, poput onog u kojem radi i autor ovog teksta, u kojem su aktivnosti jako raznovrsne, a opet sve usko povezane:

— sinteza različitih materijala i pronalaženje najboljih metoda sinteze: koriste se npr. peći koje peku keramike na temperaturama višim od 1000 °C ili metode poput PLD (Pulsed Laser Deposition) kojom se stvaraju tanki filmovi;

— ispitivanje svojstava materijala u različitim uvjetima (proučavanje kako će se materijali ponašati pri primjeni vanjskih električnih polja i tlakova, ili kako svojstva materijala ovise o dimenzijama uzoraka...); koriste se složene eksperimentalne tehnike, od Laue kamere preko tzv. rezonantnih tehnika, pa do TEM (Transmission Electron Microscopy) ili SEM (Scanning Electron Microscopy) mikroskopa;

— matematičko, termodinamičko i kvantnomehaničko modeliranje svojstava piezoelektrika i feroelektrika korištenjem moćnih kompjutorskih sustava;

— izrada minijaturnih mikromehaničkih uređaja koji nalaze svoju široku primjenu od medicine do telekomunikacija.

Zaključno, proučavanje piezoelektričnih i feroelektričnih materijala okuplja velik broj istraživača u svijetu i raspon interesa u tom području je ogroman. Na jednom kraju je optimiziranje elektroničkih sklopova u uređajima koji koriste svojstva piezoelektrika, a na drugom detaljno proučavanje kvantnomehaničkih efekata koji snažno utječu na feroelektričnost i piezoelektričnost. Područje je dinamično i otvoreno za nove materijale i iznenađujuće rezultate kao što je bio onaj 1997. godine kad su otkriveni materijali piezoelektričnih koeficijenata od preko 2000 pm/ V, bar 4 puta većih od onog u PZT, a tek se očekuju velike stvari u numeričkim modelima jer moć kompjutora zasad i dalje raste iz dana u dan. Na kraju možemo slobodno reći da je ova plemenita grana znanosti o materijalima izazov kako za one koji vole fundamentalnu znanost tako i za one koje privlači dizajn industrijskih proizvoda.

Primjena metode simetričnih polinoma u rješavanju nekih zadataka

Petar Vranjković, Zadar

Na jednom stručno-metodičkom skupu za učitelje i nastavnike matematike, između ostalog, bilo je govora o metodama koje se koriste za rješavanje raznih zadataka. Točnije, bio je prezentiran jedan popis manje-više poznatih metoda. Palo mi je, odmah, napamet da bi u popis valjalo uvrstiti i metodu simetričnih polinoma. Eto, to je bio neposredni povod za ovaj članak. Razloga ima, dakako, više. Recimo samo jedan, rad s nadarenim učenicima.

Metoda simetrije

Općenito se može reći da je načelo simetrije jedno od osnovnih načela na kojima se temelje mnoge pojave. Stoga valja razvijati osjećaj za primjenu simetričnih formula, u bilo kojoj mogućoj situaciji, ali svakako čuvati mjeru kako se ne bi prešlo u formalizam. Korist od ove metode ćemo pokazati na određen način i u ovome članku, a lijepo se može vidjeti i zašto se njome služiti.

Polinom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, od n varijabli $x_1, \ldots, x_n$, je simetričan ako se njegova vrijednost ne mijenja bilo kojom permutacijom njegovih varijabli. Npr. $P(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ je simetričan polinom jer je $P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1)$. Također je simetričan polinom $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3$, jer vrijedi $P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_3, x_2) = P(x_2, x_1, x_3) = P(x_2, x_3, x_1) = P(x_3, x_1, x_2) = P(x_3, x_2, x_1)$. Ali $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2$ nije simetričan polinom jer postoje x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$ takvi da je $P(x_1, x_2) \neq P(x_2, x_1)$. Ni polinom $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_2 x_3^2$ nije simetričan, jer može biti $P(x_1, x_2, x_3) \neq P(x_2, x_1, x_3)$.

U teoriji, kao i u primjenama, posebnu važnu ulogu imaju osnovni simetrični polinomi, a to su:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ &\vdots \\ p_n &= x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Ako u (1) uvrstimo $n = 2$, imamo:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 1, \\
p_1 &= x_1 + x_2, \\
p_2 &= x_1 x_2,
\end{aligned}
\tag{1'}
$$

a to su Vièteove formule, i pripadna kvadratna jednadžba glasi $x^2 - p_1 x + p_2 = 0$.

Sasvim slično dobijemo i algebarsku jednadžbu n-tog stupnja

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n = 0. \tag{2}$$

Osim ovih osnovnih simetričnih polinoma, promatramo i ove simetrične polinome:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= n, \\
s_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\
&\vdots \\
s_k &= x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Ti se polinomi nazivaju zbrojevi potencija ili Newtonovi polinomi. Naglasimo da je svaki polinom $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kojem su varijable osnovni simetrični polinomi $p_1, \ldots, p_n$ također simetričan polinom.

Što mi želimo?

Želimo ispitati da li postoji veza među tim simetričnim polinomima.

U ovome članku ćemo se ograničiti na polinome s dvije odnosno tri varijable.

Najprije postavljamo pitanje da li se Newtonovi polinomi mogu izraziti u funkciji osnovnih simetričnih polinoma. Prvo ćemo razmotriti Newtonove polinome $s_k = x_1^k + x_2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ i osnovne simetrične polinome $p_1 = x_1 + x_2$ i $p_1 = x_1 x_2$. Evo jednog primjera.

Primjer 1. Newtonove polinome s_1 i s_2 napišimo pomoću osnovnih simetričnih polinoma.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + x_2 = p_1, \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p_1^2 - 2p_2.
\end{aligned}
$$

Ovaj primjer nije iznimka. Vrijedi naime

Poučak 1. *Za Newtonove polinome* $s_k = x_1^k + x_2^k$, $k \in \mathbf{N}_0$ *vrijedi Newtonova formula*

$$s_k = p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2}, \quad k \geqslant 3. \tag{4}$$

Dokaz. Za svaki $k \geqslant 3$ imamo

$$s_{k-1} = x_1^{k-1} + x_2^{k-1}. \tag{5}$$

Sada (5) pomnožimo s p_1, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} p_1 s_{k-1} &= p_1 x_1^{k-1} + p_1 x_2^{k-1} = (x_1 + x_2)x_1^{k-1} + (x_1 + x_2)x_2^{k-1} \\ &= x_1^k + x_2^k + x_1 x_2 (x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) = s_k + p_2 s_{k-2}. \end{aligned}$$

Odavde neposredno dobijemo (4).

Poučak 2. (osnovni poučak za Newtonove polinome) *Za svaki Newtonov polinom* $s_k(x_1, x_2)$ *postoji polinom* $P(p_1, p_2)$ *takav da vrijedi*

$$s_k(x_1, x_2) = P(p_1, p_2).$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije. U primjeru 1 smo pokazali da je tvrdnja istinita za $k = 1$ i $k = 2$.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za polinome s_{k-2} i s_{k-1}, tj. postoje polinomi $P_1(p_1, p_2)$ i $P_2(p_1, p_2)$ takvi da je $s_{k-2} = P_1(p_1, p_2)$ i $s_{k-1} = P_2(p_1, p_2)$. Prema formuli (4) vrijedi

$$s_k = p_1 P_2(p_1, p_2) - p_2 P_1(p_1, p_2)$$

iz čega je očito da je desna strana polinom u varijablama p_1 i p_2. Time je dokaz završen.

Primijetimo međutim, da pomoću formule (4) možemo s_k izraziti pomoću p_1 i p_2 za bilo koji $k \geqslant 3$. Tako je za $k = 3$

$$s_3 = p_1 s_2 - p_2 s_1 = p_1(p_1^2 - 2p_2) - p_2 p_1 = p_1^3 - 3p_1 p_2. \tag{6}$$

Slično dobijemo za $k = 4$ i $k = 5$

$$s_4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 2p_2^2, \tag{7}$$

$$s_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1 p_2^2. \tag{8}$$

I tako dalje.

Sada se prirodno postavlja pitanje prikaza bilo kojeg simetričnog polinoma u funkciji osnovnih simetričnih polinoma.

Pogledajmo opet jedan primjer.

Primjer 2. Polinom $P(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + 4x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^2$ napisati u obliku polinoma $Q(p_1, p_2)$.

Rješenje. $P(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4(x_1 x_2)^2 = p_2 p_1 + 4p_2^2$.

Ni ovaj primjer nije iznimka. To što on govori vrijedi općenito, a sadržano je u osnovnom poučku o simetričnim polinomima. Evo toga poučka.

Poučak 3. Svaki simetrični polinom $P(x_1, x_2)$ može se na jednoznačan način prikazati u obliku polinoma $Q(p_1, p_2)$.

Dokaz. Svaki simetrični polinom $P(x_1, x_2)$ javlja se u ovim oblicima monoma:

1° $ax_1^k x_2^k$,

2° $bx_1^n x_2^m$, $n < m$, i zbog simetričnosti $bx_1^m x_2^n$.

Idemo redom.

1° $ax_1^k x_2^k = a(x_1x_2)^k = ap_2^k$.

2° $bx_1^n x_2^m + bx_1^m x_2^n = bx_1^n x_2^n (x_2^{m-n} + x_1^{m-n}) = bp_2^n s_{m-n}$.

Kako s_{m-n} možemo prikazati pomoću p_1 i p_2 (poučak 2) to je dokaz poučka 3 završen.

Valja primijetiti da nam dokaz ovog poučka daje i učinkoviti postupak kojim možemo simetrični polinom prikazati u funkciji p_1 i p_2.

Napomena. Spomenuti poučci mogu se poopćiti na n varijabli.

Zadatak 1. Riješi sustav jednadžbi

$$xy = 5,$$
$$x^4 + y^4 = 626.$$

Rješenje. Lijeve strane u zadanim jednadžbama su simetrični polinomi pa se mogu prikazati pomoću p_1 i p_2. Tako imamo

$$xy = p_2 = 5,$$
$$x^4 + y^4 = s_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 = 626.$$

Ako u drugu jednadžbu uvrstimo $p_2 = 5$, dobijemo

$$p_1^4 - 20p_1^2 - 576 = 0.$$

Ova bikvadratna jednadžba ima rješenja: $p_1^2 = -16$, $p_1^2 = 36$. Dakle, naš je sustav ekvivalentan sustavima:

1° $x+y=6$, $xy=5$ 2° $x+y=-6$, $xy=5$ 3° $x+y=4i$, $xy=5$ 4° $x+y=-4i$, $xy=5$

Riješimo 1°. Prema Vièteovim formulama x i y su rješenja jednadžbe $z^2-6z+5=0$, tj. $z_1 = 1 = x$, $z_2 = 5 = y$, a zbog simetrije imamo $x = 5$, $y = 1$.

Analogno se rješavaju i ostali slučajevi, pa se tako dobije skup svih rješenja

$$S = \{(1,5),(5,1),(-1,-5),(-5,-1),(-i,5i),(5i,-i),(-5i,i),(i,-5i)\}.$$

Zadatak 2. Riješi sustav jednadžbi

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 13.$$

Rješenje. Slično, kao u prethodnom primjeru, dobijemo:

$$p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 3p_2^2 = 91,$$
$$p_1^2 - p_2 = 13.$$

Ako p_2 iz druge jednadžbe uvrstimo u prvu jednadžbu, nakon sređivanja imamo $p_1^2 = 16$ i $p_2 = 3$. Prema tome ekvivalentni sustavi su:

1° $p_1 = -4$, $p_2 = 3$ 2° $p_1 = 4$, $p_2 = 3$

odnosno

$$\begin{aligned} x+y&=-4, & x+y&=4,\\ xy&=3, & xy&=3. \end{aligned}$$

Konačni skup rješenja je

$$S=\{(-3,-1),(-1,-3),(1,3),(3,1)\}.$$

Zadatak 3. Rastaviti na proste faktore polinom

$$P(x,y)=x^3y+xy^3+2x^2y^2-x^3y^2-x^2y^3+xy-x-y.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} P(x,y)&=xy(x^2+y^2)+2(xy)^2-(xy)^2(x+y)+xy-(x+y)\\ &=p_2(p_1^2-2p_2)+2p_2^2-p_2^2p_1+p_2-p_1=(p_1-p_2)(p_1p_2-1)\\ &=(x+y-xy)((x+y)xy-1). \end{aligned}$$

Zadatak 4. Skratiti razlomak

$$f(a,b)=\frac{a^3-2a^2b-2ab^2+b^3}{a^5-5a^3b^2-5a^2b^3+b^5}.$$

Rješenje. Za $p_1=a+b$ i $p_2=ab$ imamo

$$f(a,b)=\frac{p_1^3-3p_1p_2-2p_2p_1}{p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2-5p_2^2p_1}=\frac{p_1(p_1^2-5p_2)}{p_1^3(p_1^2-5p_2)}=\frac{1}{p_1^2}=\frac{1}{(a+b)^2}.$$

Zadatak 5. Riješi u skupu $\mathbf{R}$ jednadžbu

$$2-\sqrt[4]{15+x}=\sqrt[4]{1-x}.$$

Rješenje. Neka je $a=\sqrt[4]{15+x}$, $b=\sqrt[4]{1-x}$. Dobijemo

$$\begin{aligned} a^4+b^4&=16,\\ a+b&=2. \end{aligned}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2&=16,\\ p_1&=2, \end{aligned}$$

odnosno $p_2^2-8p_2=0$, tj. $p_2=0$ ili $p_2=8$, što daje ove sustave:

$$\begin{aligned} p_1&=2, & p_1&=2,\\ p_2&=0, & p_2&=8. \end{aligned}$$

To znači da je

$$\begin{aligned} a+b&=2, & a+b&=2,\\ ab&=0, & ab&=8, \end{aligned}$$

pa je u prvom slučaju $a=0$, $b=2$, i zbog simetrije $a=2$, $b=0$. U drugom slučaju nemamo realnih rješenja. Sada imamo $\sqrt[4]{15+x}=0$ što daje $x=-15$, odnosno $\sqrt[4]{15+x}=2$, a to daje $x=1$. Nakon provjere utvrđujemo da je skup rješenja

$$S=\{-15,1\}.$$

Zadatak 6. Riješi jednadžbu

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$$

Rješenje. Uvedemo li zamjenu $\sqrt{1-x^2}=y$, dobijemo

$$x^2+y^2=1. \qquad (*)$$

Sada zadana jednadžba glasi: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{35}{12}$ odnosno $\frac{x+y}{xy}=\frac{35}{12}$, i dalje $\frac{p_1}{p_2}=\frac{35}{12}$, pa je

$$p_1=35k, \quad p_2=12k. \qquad (**)$$

Iz $(*)$ izlazi $s_2=p_1^2-2p_2=1$, pa zbog $(**)$, nakon sređivanja dobijemo:

$$1225k^2-24k-1=0,$$

a rješenja te jednadžbe su $k_1=\frac{1}{25}$ i $k_2=-\frac{1}{49}$. Sada prema $(**)$ dobijemo dva ekvivalentna sustava jednadžbi:

$$1^\circ \quad x+y=\frac{7}{5}, \qquad 2^\circ \quad x+y=-\frac{5}{7},$$
$$xy=\frac{12}{25}, \qquad xy=-\frac{12}{49}.$$

Prvi sustav daje dva rješenja $x_1=\frac{3}{5}$ i $x_2=\frac{4}{5}$, a drugi još $x_3=\frac{-5+\sqrt{73}}{14}$ i $x_4=\frac{-5-\sqrt{73}}{14}$. Provjerom utvrđujemo da je skup svih rješenja

$$S=\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{\sqrt{73}-5}{14}\right\}.$$

Sada ćemo promatrati osnovne simetrične polinome od tri varijable:

$$p_1=x_1+x_2+x_3,$$
$$p_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,$$
$$p_3=x_1x_2x_3,$$

i Newtonove polinome $s_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Tada imamo:

$$s_0=x_1^0+x_2^0+x_3^0=3=3p_0,$$
$$s_1=p_1,$$
$$s_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$$=p_1^2-2p_2.$$

Analogno formuli (4) lako možemo dobiti Newtonovu formulu

$$s_k=p_1s_{k-1}-p_2s_{k-2}+p_3s_{k-3}, \quad k\geqslant 3. \qquad (9)$$

I opet uočimo da pomoću formule (9) možemo s_k izraziti pomoću p_1, p_2 i p_3 za $k\geqslant 3$. Tako je za $k=3$,

$$\begin{aligned} s_3&=p_1s_2-p_2s_1+p_3s_0=p_1(p_1^2-2p_2)-p_2p_1+3p_3\\ &=p_1^3-3p_1p_2+3p_3, \end{aligned} \qquad (10)$$

a za $k = 4$ i $k = 5$ dobijemo:

$$s_4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 2p_2^2 + 4p_1 p_3, \tag{11}$$

$$s_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1 p_2^2 + 5p_1^2 p_3 - 5p_2 p_3. \tag{12}$$

I tako dalje.

A sada zadaci, odnosno primjena.

Zadatak 7. Ako je

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 1, \end{aligned}$$

onda vrijedi: $xy + xz + yz = 0$ i $xyz = 0$. Dokazati.

Rješenje. Lijeve su strane u tim jednadžbama simetrični polinomi pa se mogu prikazati pomoću osnovnih simetričnih polinoma. Tako dobijemo:

$$\begin{aligned} & p_1 = 1, \\ & p_1^2 - 2p_2 = 1, \\ & p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3 = 1. \end{aligned}$$

Ovaj se sustav lagano rješava, pa dobijemo: $p_2 = p_3 = 0$. Prema tome imamo $xy + xz + yz = p_2 = 0$, $xyz = p_3 = 0$. Time je dokaz dovršen.

Zadatak 8. Sustav

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 15, \\ x^4 + y^4 + z^4 &= 35 \end{aligned}$$

ima realno rješenje (x, y, z) za koje vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 < 10$. Naći $x^5 + y^5 + z^5$.

Rješenje. Polinomi s lijeve strane u zadanom sustavu su simetrični, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} & p_1 = 3, \\ & p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3 = 15, \\ & p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 2p_2^2 + 4p_1 p_3 = 35. \end{aligned}$$

Ovaj sustav daje ova rješenja:

$$\begin{array}{lll} p_1 = 3, & p_2 = 1, & p_3 = -1; \\ p_1 = 3, & p_2 = -1, & p_3 = -7. \end{array}$$

Kako mora biti $x^2 + y^2 + z^2 < 10$, onda je $p_1^2 - 2p_2 < 0$, pa ovaj uvjet određuje da mora vrijediti jedino $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$. Sada imamo

$$x^5 + y^5 + z^5 = s_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1 p_2^2 + 5p_1^2 p_3 - 5p_2 p_3 = 83.$$

Zadatak 9. Rastavi na faktore polinom

$$P(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3.$$

Rješenje. Uvedimo zamjene:

$$\left.\begin{aligned} a&=x-y\\ b&=y-z\\ \underline{c}&\underline{=z-x} \end{aligned}\right\}+$$
$$a+b+c=0=p_1$$

Sada imamo $P(a,b,c)=a^3+b^3+c^3$, a to je simetrični polinom pa vrijedi $P(a,b,c)=p_1^3-3p_1p_2+3p_3=3p_3=3abc$. Prema tome imamo

$$P(x,y,z)=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Zadatak 10. Ako su x, y, $z\in\mathbf{Z}$, a $x+y+z$ je djeljiv sa 6, onda je $x^3+y^3+z^3$ djeljiv sa 6. Dokazati.

Rješenje. Prema Newtonovoj formuli $s_3=p_1^3-3p_1p_2+3p_3$ dobivamo

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz.$$

Sada treba dokazati da je i treći pribrojnik $3xyz$ djeljiv sa 6. Dovoljno je utvrditi da je bar jedan od brojeva z, y, z paran. Pretpostavimo da su sva tri broja neparna. Onda je i njihov zbroj neparan što je u suprotnosti s uvjetom u zadatku da je $x+y+z$ paran. Prema tome bar jedan od njih je paran, pa je $3xyz$ djeljiv sa 6. Time je dokaz završen.

Zadatak 11. Duljine stranica trokuta su rješenja jednadžbe $x^3-ax^2+bx-c=0$. Naći njegovu površinu.

Rješenje. Prema Vièteovim formulama, odnosno formulama (1’), imamo

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=a=p_1,\\ &x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b=p_2,\\ &x_1x_2x_3=c=p_3. \end{aligned}$$

Poluopseg je $s=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{2}=\dfrac{p_1}{2}=\dfrac{a}{2}$ pa je

$$\begin{aligned} s-x_1&=\frac{p_1}{2}-x_1,\\ s-x_2&=\frac{p_1}{2}-x_2,\\ s-x_3&=\frac{p_1}{2}-x_3. \end{aligned}$$

Prema Heronovoj formuli za površinu trokuta imamo

$$\begin{aligned} P^2&=\frac{p_1}{2}\Big(\frac{p_1}{2}-x_1\Big)\Big(\frac{p_1}{2}-x_2\Big)\Big(\frac{p_1}{2}-x_3\Big)\\ &=\frac{p_1}{16}(p_1^3-2p_1^2x_1-2p_1^2x_2-2p_1^2x_3+4p_1x_1x_2+4p_1x_1x_3+4p_1x_2x_3-8x_1x_2x_3)\\ &=\frac{p_1}{16}(4p_1p_2-p_1^3-8p_3),\\ P&=\frac{1}{4}\sqrt{a(4ab-a^3-8c)}. \end{aligned}$$

Primjena majorizacije u trigonometriji

Predrag Lončar[1], *Varaždin*

Razno-razne zanimljive nejednakosti pojavljuju se u mnogim područjima matematike, a gotovo redovito i na matematičkim natjecanjima. Opisat ćemo jednu metodu koja se koristi u mnogim područjima, a ovdje ćemo ilustrirati njezinu primjenu na nekoliko problema iz trigonometrije. Koristit ćemo pojam konveksne funkcije, čija je definicija, kao i čuvena Jensenova nejednakost, objašnjena u [1]. Prisjetimo se te definicije.

Definicija 1. *Neka je I interval u skupu* $\mathbf{R}$ *realnih brojeva. Za funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ kažemo da je konveksna na I ako za svako x, y iz I i svako λ, $0 \le \lambda \le 1$, vrijedi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1}$$

Ako pritom za svako x i y iz I, takvo da je $x \neq y$, i svako λ, $0 < \lambda < 1$, vrijedi stroga nejednakost, kažemo da je funkcija f strogo konveksna. Funkcija $f : I \to \mathbf{R}$ je (strogo) konkavna ako je funkcija $-f$ (strogo) konveksna.

Nejednakost (1) ima svoju geometrijsku interpretaciju: tetiva, tj. pravocrtna spojnica dviju točaka $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ treba biti iznad grafa ili na grafu konveksne funkcije $y = f(x)$. To svojstvo može poslužiti kao definicija konveksnosti kod funkcija jedne, pa i kod funkcija više varijabli. O konveksnim funkcijama, njihovim karakterizacijama i o dobivanju geometrijskih nejednakosti pomoću njih, već je bilo govora u MFL-u, u člancima [1], [2] i [6]. Za provjeravanje stroge konveksnosti, tj. stroge konkavnosti koristan je teorem 3 iz [2] ($f'' > 0$ je dovoljan uvjet za strogu konveksnost, odnosno $f'' < 0$ za strogu konkavnost). Ovdje ćemo se upoznati s još jednim načinom korištenja konveksnih funkcija za dobivanje geometrijskih nejednakosti u trokutu – pomoću teorije majorizacije. Upoznajmo stoga njezine osnove!

Definicija 2. *Neka su $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dvije n-torke realnih brojeva. Sa $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$ i $(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots \underline{y}_n)$ označimo njihova nerastuća preuređenja, tj. takve njihove permutacije da vrijedi $\underline{x}_1 \ge \underline{x}_2 \ge \ldots \ge \underline{x}_n$ i $\underline{y}_1 \ge \underline{y}_2 \ge \ldots \ge \underline{y}_n$. Kažemo da Y majorizira X i pišemo $Y \succ X$ odnosno $X \prec Y$, ako je ispunjeno: $\sum_{i=1}^{k} \underline{y}_i \ge \sum_{i=1}^{k} \underline{x}_i$ za sve $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i $\sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$.*

Definicija 3. *Neka su $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dvije n-torke realnih brojeva. Kažemo da je X usrednjenje od Y ako postoji n^2 nenegativnih realnih brojeva $p_{\mu\nu}$ takvih da je*

$$\sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1, \ \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1 \ i \ x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} y_\nu \ \text{ za sve } \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

[1] Autor je predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu; e-mail: ivan.loncar@vz.htnet.hr

Napomena 1. Može se pokazati da je $Y \succ X$ ako i samo ako je $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ usrednjenje od $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Napomena 2. Muirhead je 1903. pokazao da je $Y \succ X$ ako i samo ako X možemo dobiti iz Y uzastostopnom primjenom od najviše $n-1$ ovakvih transformacija T na $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$\begin{aligned} &T(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (y_1, \dots, y_{j-1}, \lambda y_j + (1-\lambda)y_k, y_{j+1}, \dots, y_{k-1}, (1-\lambda)y_j + \lambda y_k, y_{k+1}, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Pri tome je $0 \le \lambda \le 1$. Dakle, sve komponente, osim j-te i k-te $(j < k)$ ostaju fiksne, dok j-ta i k-ta postaju konveksne kombinacije od y_j i y_k. Pokažimo da j-ta komponenta mora biti $\lambda y_j + (1-\lambda)y_k$, a k-ta $(1-\lambda)y_j + \lambda y_k$ za neko λ, $0 \le \lambda \le 1$. Kako transformacija T djeluje samo na j-tu i k-tu komponentu možemo, bez smanjenja općenitosti, uzeti $n = 2$, $j = 1$ i $k = 2$, tj. $X = (x_1,\ x_2)$ i $Y = (y_1, y_2)$. Uzmimo da je $x_1 \ge x_2$ i $y_1 \ge y_2$. Sada $Y \succ X$ povlači $y_1 \ge x_1$ i $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ po definiciji 2, pa stoga i $y_2 \le x_2$. Imamo dakle $y_2 \le x_2 \le x_1 \le y_1$, pa postoje λ_1 i λ_2 takvi da je $0 \le \lambda_1 \le 1$, $0 \le \lambda_2 \le 1$ i vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 y_1 + (1-\lambda_1)y_2, \\ x_2 &= (1-\lambda_2)y_1 + \lambda_2 y_2. \end{aligned} \tag{3}$$

No zbog $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ imamo $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1 - y_2) = 0$, tj. ili $\lambda_1 = \lambda_2$ ili $y_1 = y_2 = x_1 = x_2$. U posljednjem slučaju možemo uzeti $\lambda_1 = \lambda_2$, pa u svakom slučaju vrijedi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Ujedno iz formula (3) vidimo da je X usrednjenje od Y (vidi definiciju 3), što je u skladu s napomenom 1.

Teorem 1. *Ako za* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *i* $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *vrijedi* $X \prec Y$*, onda je nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i), \tag{4}$$

ispunjena za sve konveksne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je f konveksna funkcija i $X \prec Y$. Po napomeni 1 x_μ je konveksna kombinacija od y_ν, tj. $x_\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} y_\nu$ za sve $\mu = 1, 2, \dots, n$. Zbog konveksnosti od f imamo $f(x_\mu) \le \sum\limits_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} f(y_\nu)$. Sumiramo li te nejednakosti po μ, slijedi

$$\sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu) \le \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} f(y_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n}\Big(\sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu}\Big) f(y_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} f(y_\nu).$$

□

Napomena 3. Može se dokazati da vrijedi i obrat teorema 1 i da, ako je funkcija f strogo konveksna, u nejednakosti (4) vrijedi znak jednakosti jedino u slučaju kada su skupovi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ jednaki.

S važnošću teorije majorizacije možete se upoznati u Matematičko-fizičkom listu u [3, teorem 1], u jednoj nejednakosti za simetrične funkcije od tri varijable, koja je ustvari poseban slučaj Muirheadovog teorema. Navedimo ga bez dokaza.

Teorem 2. *Neka su* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ n*-torke realnih brojeva, a* Π *proizvoljna permutacija skupa* $\{1, 2, \dots, n\}$. *Nuždan i dovoljan*

uvjet da $\sum_{\Pi} \alpha_{\Pi(1)}^{x_1}\alpha_{\Pi(2)}^{x_2}\ldots\alpha_{\Pi(n)}^{x_n}$ *bude usporediva s* $\sum_{\Pi} \alpha_{\Pi(1)}^{y_1}\alpha_{\Pi(2)}^{y_2}\ldots\alpha_{\Pi(n)}^{y_n}$ *za sve* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$, *je da jedan od* X *i* Y *bude majoriziran s onim drugim. Nejednakost*

$$\sum_{\Pi} \alpha_{\Pi(1)}^{x_1}\alpha_{\Pi(2)}^{x_2}\ldots\alpha_{\Pi(n)}^{x_n} \leq \sum_{\Pi} \alpha_{\Pi(1)}^{y_1}\alpha_{\Pi(2)}^{y_2}\ldots\alpha_{\Pi(n)}^{y_n} \tag{5}$$

vrijedi za sve realne n*-torke* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$ *ako i samo ako je* $X \prec Y$. *Jednakost u nejednakosti (5) nastupa ako i samo ako je* $x_i = y_i$ *za sve* $i = 1, 2, \ldots, n$ *ili* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

Teorem 1 omogućuje dokazivanje i nekih netrivijalnih nejednakosti s konveksnim funkcijama. Jedna takva je sadržaj sljedeće leme.

Lema 1. *Neka je* I *interval u* $\mathbf{R}$ *i* $f : I \to \mathbf{R}$ *neprekidna konveksna funkcija. Neka je* $0 \leq \delta \leq \eta$. *Tada za sve* x *takve da su* $x - \eta$, $x - \delta$, $x + \delta$, $x + \eta$ *u* I *vrijedi nejednakost*

$$f(x-\delta) + f(x+\delta) \leq f(x-\eta) + f(x+\eta). \tag{6}$$

Dokaz. Neka je $X = (x + \delta,\ x - \delta)$ i $Y = (x + \eta,\ x - \eta)$. Tada $X \prec Y$ jer $x + \eta \geq x + \delta$ i $x + \eta + x - \eta = x + \delta + x - \delta = 2x$. Nejednakost (6) je stoga posljedica teorema 1. $\square$

Issai Schur je, po uzoru na nejednakost (4), uveo važan pojam Schur konveksne funkcije.

Definicija 4. *Za realnu funkciju* $F : A \to \mathbf{R}$ *definiranu na skupu* $A \subset \mathbf{R}^n$ *kažemo da je* **Schur konveksna** *ili* **S-konveksna** *ako* $X \prec Y$ *povlači* $F(X) \leq F(Y)$. *Ako je* $X \prec Y$, *pri čemu* X *nije permutacija od* Y, *povlači* $F(X) < F(Y)$ *kažemo da je* F *strogo* **Schur konveksna** *ili* **S-konveksna**. *Za realnu funkciju* $F : A \to \mathbf{R}$ *definiranu na skupu* $A \subset \mathbf{R}^n$ *kažemo da je* **Schur konkavna** *ili* **S-konkavna** *ako je funkcija* $-F$ **Schur konveksna**.

Iz teorema 1 neposredno slijedi

Posljedica 1. *Ako je* f *simetrična i konveksna funkcija, tada je* f *Schur konveksna, pa* $X \prec Y$ *povlači* $f(X) \leq f(Y)$. *Ako je* f *simetrična i konkavna funkcija, tada je* f *Schur konkavna, pa* $X \prec Y$ *povlači* $f(X) \geq f(Y)$.

Netrivijalno je da su elementarni simetrični polinomi od x_1, x_2, ..., x_n definirani s

$$S_k(X) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

monotono nerastuće i Schur konkavne funkcije za $x_i \geq 0$. Ako je $k > 1$, $S_k(X)$ su i strogo Schur konkavne funkcije za $x_i > 0$. U slučaju $k = n$ je $S_n(X) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, imamo sljedeću posljedicu Schur konkavnosti od $S_n(X)$.

Posljedica 2. *Ako su* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *i* $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *dvije nenegativne n-torke takve da vrijedi* $X \prec Y$*, onda vrijedi* $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$.

Teorem 3. *Neka je* $I \subset \mathbf{R}$ *interval, i* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$*. Ako je* $f : I \to \mathbf{R}$ *(strogo) konveksna funkcija, onda je funkcija* $F(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ *(strogo) Schur konveksna na* I^n*, tj.* $X \prec Y$ *na* I^n *povlači* $F(X) \leq F(Y)$*. Ako je* $f : I \to \mathbf{R}$ *strogo konveksna funkcija i* $X \prec Y$*, onda* $F(X) = F(Y)$ *vrijedi jedino u slučaju kada su skupovi* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *i* $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *jednaki.*

Dokaz. Neka je $X \prec Y$. Po primjedbi 2, X možemo dobiti iz Y uzastopnom primjenom transformacija T (vidi (2)), pa je dovoljno dokazati za slučaj da je $X = TY$. No onda možemo u dokazu, bez smanjenja općenitosti, uzeti $n = 2$, $X = (x_1,\ x_2)$, $Y = (y_1,\ y_2)$ i

$$x_1 = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2,$$
$$x_2 = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2,$$

za neko λ, $0 \leq \lambda \leq 1$ (vidi napomenu 3). Korištenjem definicije (1) sada imamo

$$\begin{aligned} F(X) &= f(x_1) + f(x_2) = f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) + f((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \\ &\leq (\lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2)) + ((1-\lambda)f(y_1) + \lambda f(y_2)) \\ &= f(y_1) + f(y_2) = F(Y). \end{aligned}$$

Zadnja tvrdnja o znaku jednakosti izlazi iz napomene 3.

Nejednakosti za kutove trokuta

Primijenimo sada teoriju majorizacije za dobivanje nekih geometrijskih nejednakosti u trokutu. Neka su α, β i γ kutovi ravninskoga trokuta, tj. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Lema 2. Vrijede ove majorizacije,

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0) \quad \text{za sve trokute,} \tag{7}$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{za sve šiljastokutne trokute,} \tag{8}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0) \quad \text{za sve tupokutne trokute.} \tag{9}$$

Dokaz. Uzmimo, bez smanjenja općenitosti, $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Tada je $3\alpha \geq \alpha + \beta + \gamma = \pi$, tj. $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$. Isto tako je $3\gamma \leq \alpha + \beta + \gamma = \pi$, tj. $\gamma \leq \frac{\pi}{3}$, što povlači $\alpha + \beta = \pi - \gamma \geq \frac{2\pi}{3}$. Sada $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$, $\alpha + \beta \geq \frac{2\pi}{3}$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ povlače $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma)$. U slučaju tupokutnih trokuta, imamo $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, pa stoga $\beta + \gamma = \pi - \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. No zbog $\gamma \leq \beta$, sada imamo $2\gamma \leq \frac{\pi}{2}$, tj. $\gamma \leq \frac{\pi}{4}$, što povlači, $\pi - \gamma = \alpha + \beta \geq \frac{3\pi}{4}$. Sada $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta \geq \frac{3\pi}{4}$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ povlače $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma)$ za tupokutne trokute. Ostale navedene majorizacije se lako dokazuju. $\square$

Promatrajmo funkciju $f(x) = \sin x$ koja je strogo konkavna na intervalu $(0, \pi)$ i primijenimo na nju teorem 3 s $X = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ uvažavajući majorizacije (8) iz leme 2. Time dobijemo

$$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin 0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}.$$

odnosno

$$2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{za šiljastokutne trokute.}$$

Na isti način dokazali bi, koristeći majorizacije (7) i (9) i teorem 3, nejednakosti:

$$2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{za sve trokute,}$$

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le 1 + \sqrt{2} \quad \text{za tupokutne trokute.}$$

Znak jednakosti dostiže se u sve tri nejednakosti jedino u slučaju jednakostraničnog trokuta (vidi teorem 3).

Promatrajmo sada funkciju $\ln\sin x$ koja je strogo konkavna na intervalu $(0, \pi)$ i ocijenimo je na skupu tupokutnih trokuta. Po majorizaciji (9) i teoremu 3 imamo,

$$\ln\sin\alpha + \ln\sin\beta + \ln\sin\gamma \le \ln\sin\frac{\pi}{2} + \ln\sin\frac{\pi}{4} + \ln\sin\frac{\pi}{4},$$

tj.

$$\ln(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) \le 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\frac{1}{2},$$

i konačno, eksponenciranjem,

$$0 < \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{1}{2} \quad \text{za tupokutne trokute.} \tag{10}$$

Znak jednakosti dostiže se jedino u slučaju jednakokračnog pravokutnog trokuta (vidi teorem 3).

Na isti bi način, koristeći majorizaciju (7) i teorem 3, dokazali da je

$$0 < \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{za sve trokute,}$$

i da se znak jednakosti dostiže jedino u slučaju jednakostraničnog trokuta.

Zadatak 1. Dokažite da za sve šiljastokutne trokute vrijedi nejednakost

$$\sqrt{2} < \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2}.$$

Zadatak 2. Napišite analogne nejednakosti za sve trokute i posebno za šiljastokutne trokute za funkcije $\cos x$, $\cos^2\frac{x}{2}$, koje su strogo konkavne na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, i za funkciju $\ln\cos\frac{x}{2}$, koja je strogo konkavna na $(0,\ \pi)$.

Funkcija tangens

Funkcija $tg^m x$ je strogo konveksna na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ za $m \geq 1$; a funkcija $tg^m \frac{x}{2}$ je strogo konveksna na intervalu $(0, \pi)$ za $m \geq 1$. Majorizacija (8), (7) i teorem 3 daju za $m \geq 1$ ove nejednakosti u trokutu:

$$3^{\frac{m+2}{2}} \leq \operatorname{tg}^m \alpha + \operatorname{tg}^m \beta + \operatorname{tg}^m \gamma \quad \text{za šiljastokutne trokute,}$$

$$3^{-\frac{m-2}{2}} \leq \operatorname{tg}^m \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^m \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^m \frac{\gamma}{2} \quad \text{za sve trokute.}$$

Funkcija $\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ je strogo konkavna na $(0, \pi)$, pa istim zaključivanjem kao u dokazu nejednakosti (10) imamo

$$0 < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \text{za šiljastokutne trokute.}$$

Znakovi jednakosti u sve tri nejednakosti dostižu se jedino u slučaju jednakostraničnog trokuta.

Nejednakosti za duljine stranica trokuta

Neka su a, b i c duljine stranice trokuta i $s = \frac{a+b+c}{2}$ njegov poluopseg. U daljnjem pretpostavljamo da vrijedi $a \geq b \geq c > 0$. Nadalje, vrijedi nejednakost trokuta $b+c > a$ ili ekvivalentno $s > a$. Neka je $p = s - a$, $q = s - b$ i $r = s - c$. Sada je $0 < p \leq q \leq r < s$, $p + q + r = s$, $a = s - p = q + r$, i analogno $b = r + p$ i $c = p + q$.

Lema 3. *Za sve trokute vrijede ove majorizacije,*

$$\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right) \prec (r, q, p) \prec (s, 0, 0), \tag{11}$$

$$\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) \prec (a, b, c) \prec (s, s, 0), \tag{12}$$

$$(a, b, c) \prec (2r, 2q, 2p), \tag{13}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \prec (a, b, c). \tag{14}$$

Dokaz. Dokažimo (11). Uz gornje pretpostavke imamo $3r \geq p + q + r = s$, tj. $r \geq \frac{s}{3}$. Nadalje je $3p \leq p + q + r = s$, tj. $p \leq \frac{s}{3}$, što povlači $q + r = s - p \geq \frac{2s}{3}$. Sada $r \geq \frac{s}{3}$, $q + r \geq \frac{2s}{3}$ i $p + q + r = s$ povlači $\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right) \prec (r, q, p)$ (definicija 2). Nadalje je $s > r$, $s + 0 > s - p = q + r$ i $s + 0 + 0 = p + q + r$, pa $(r, q, p) \prec (s, 0, 0)$.

Dokažimo (12). Iz $p \leq \frac{s}{3}$ ujedno slijedi $a = s - p = q + r \geq \frac{2s}{3}$. Osim toga je $a + b = q + r + r + p = s + r \geq s + \frac{s}{3} = \frac{4s}{3}$. Kako je $a + b + c = 2s$, imamo $\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) \prec (a, b, c)$. Nadalje je $s > a$, $s + s > a + b$ i $s + s + 0 = a + b + c$, pa $(a, b, c) \prec (s, s, 0)$.

Dokažimo (13). Prvo, $2r \geq q + r = a$, $2r + 2q \geq q + r + r + p = a + b$ i $2r + 2q + 2p = 2s = a + b + c$, pa je (13) dokazano.

Dokažimo (14). Imamo $\frac{a+b}{2} \geq \frac{c+a}{2} \geq \frac{b+c}{2}$ i $a \geq \frac{a+b}{2}$, $a+b \geq \frac{a+b}{2} + \frac{c+a}{2}$ i $a+b+c = \frac{a+b}{2} + \frac{c+a}{2} + \frac{b+c}{2}$, pa je (14) dokazano.

Napomena 4. Ocjene simetričnih funkcija na skupu tupokutnih trokuta često predstavljaju problem. C. Tanasescu je pokazao da za tupokutne trokute vrijede ove majorizacije,

$$(2(\sqrt{2}-1)s, (2-\sqrt{2})s, (2-\sqrt{2})s) \prec (a,b,c), \tag{15}$$

$$((\sqrt{2}-1)s, (\sqrt{2}-1)s, (3-2\sqrt{2})s) \prec (r,q,p). \tag{16}$$

Uočite da se na desnoj strani majorizacije (15) pojavljuju stranice jednakokračnog pravokutnog trokuta, a na desnoj strani majorizacije (16) njihove dopune do s.

Primijenimo sada majorizaciju na dokazivanje nejednakosti za stranice trokuta. Kolekcija takvih nejednakosti može se naći u knjizi [5] i mnoge dokazati, pa i poboljšati uz pomoć teorije majorizacije. Sljedeći zadatak je poboljšana verzija zadatka 5.47 iz te knjige, u kojem je gornja ograda $\frac{3}{2}s$ zamijenjena s boljom $\sqrt{2}s$.

1. Dokazati da za sve trokute vrijedi nejednakost

$$\sqrt{a(s-a)} + \sqrt{b(s-b)} + \sqrt{c(s-c)} \leq \sqrt{2}s.$$

Kako je za sve trokute $\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) \prec (a,b,c)$ (majorizacija (12), a funkcija $f(x) = \sqrt{x(s-x)}$ je strogo konkavna na intervalu $(0,s)$ (graf od $f(x)$ je luk gornje polukružnice), teorem 3 daje

$$\sqrt{a(s-a)} + \sqrt{b(s-b)} + \sqrt{c(s-c)} \leq 3\sqrt{\frac{2s}{3} \cdot (s - \frac{2s}{3})} = \sqrt{2}s.$$

Jednakost se dostiže jedino u slučaju jednakostraničnog trokuta.

2. Dokazati da za sve trokute vrijedi nejednakost

$$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a). \tag{17}$$

Iako se čini kompliciranom, nejednakost (17) slijedi odmah iz majorizacije (14) i posljedice 2.

Zadatak 3. Dokažite nejednakost (17) na drugi način, koristeći nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine. Odatle se vidi da (17) vrijedi i ako su a, b i c proizvoljni nenegativni brojevi i da znak jednakosti vrijedi jedino u slučaju $a = b = c$.

Literatura

[1] Josip E. Pečarić, *Konveksne funkcije i nejednakosti*, MFL, 4/ 159, god. XXXIX, Zagreb 1988.–1989., str. 121–131.

[2] Marko Valčić, *Primjena Jensenove nejednakosti u trigonometriji*, MFL 1/ 221, god. LVI, Zagreb 2005.–2006., str. 18–19.

[3] Hojoo Lee, *Nejednakosti s homogenim simetričnim polinomima*, MFL 1/ 205, god. LII, Zagreb 2001.–2002., str. 12–17.

[4] A. W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 143., Academic Press 1979.

[5] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen 1969.

[6] Josip E. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Mala matematička biblioteka 6., Zagreb 1996.

Geometrijski dokazi nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine

Anđelko Marić, Sinj

Podsjetimo se definicije:

Za pozitivne realne brojeve $x_1,\ x_2,\dots,x_n$, *broj* $A = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}$ *zove se aritmetička, a broj* $G = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ *geometrijska sredina brojeva* $x_1,\ x_2,\dots,x_n$.

Vrijedi poučak:

Aritmetička sredina nije manja od geometrijske sredine, to jest $A \geqslant G$, *pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Za $n = 2$ i pozitivne brojeve x, y, ta se nejednakost piše:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}. \tag{1}$$

Često se ta nejednakost piše u ekvivalentnom obliku:

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy, \tag{1'}$$

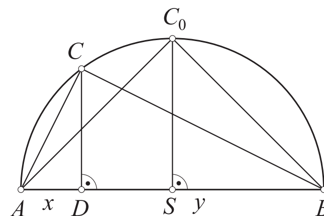
(svaki je broj zamijenjen svojim kvadratom). Dokaz te nejednakosti vrlo je jednostavan. Pokažimo ga. Vrijedi očita nejednakost:

$$(x-y)^2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Odavde se dobije ekvivalentna nejednakost: $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$, odnosno $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, što je (1'). Jednakost u (1') vrijedi ako i samo ako vrijedi u (2), to jest ako i samo ako je $x = y$.

Sada ćemo navesti tri dokaza u kojima ćemo koristiti geometrijsku, odnosno analitičko-geometrijsku metodu.

1. Pozitivne brojeve x i y možemo predočiti dužinama duljina x, odnosno y. Neka su A, D i B kolinearne točke (u tom uređaju), uzete tako da je $|AD| = x$, $|BD| = y$, $|AB| = x + y$. Ako je S polovište dužine $\overline{AB}$, tada je $|AS| = |BS| = \dfrac{x+y}{2}$. Nacrtajmo polukružnicu k kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer, tj. polukružnicu sa središtem u S i polumjerom $r = \dfrac{x+y}{2}$.



Slika 1.

Neka su C i C_0 točke polukružnice k takve da su njihove ortogonalne projekcije na promjer $\overline{AB}$ točke D, odnosno S (sl. 1). Očito vrijedi

$$|C_0S| \geqslant |CD|. \tag{3}$$

Jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako je $C \equiv C_0$, tj. ako je $x = y$.

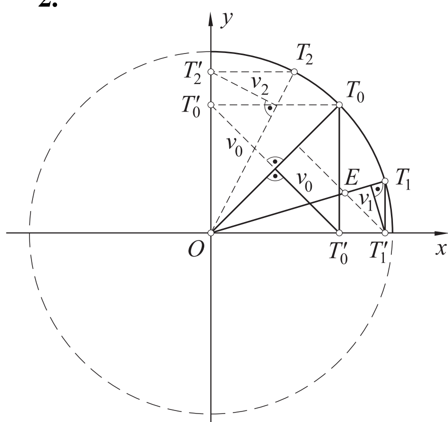
Po Talesovu poučku, trokuti ABC i ABC_0 su pravokutni, a dužine $\overline{CD}$ i $\overline{C_0S}$ su njihove visine na zajedničku hipotenuzu $\overline{AB}$.

Po Euklidovu poučku vrijedi

$$|CD| = \sqrt{|AD|\cdot|BD|} = \sqrt{xy}. \tag{4}$$

Kako je $|C_0S| = r = \dfrac{x+y}{2}$, to, zbog (3) i (4), neposredno slijedi $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. Time je poučak o nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokazan. Iz svega, također proizlazi da jednakost u dokazanoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

2.



Slika 2.

Označimo, za pozitivne brojeve x i y: $x^2+y^2=r^2$, $r\in\mathbf{R}^+$. Skup svih uređenih parova (x,y) za koje to vrijedi predstavlja luk (u prvom kvadrantu) kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i polumjera r. Neka je $T_0(x_0,y_0)$ točka na luku kružnice, tako da je $x_0=y_0$, a $T_1(x_1,y_1)$ bilo koja točka toga luka pri čemu je $x_1\geqslant x_0$, zbog čega je $y_1\leqslant y_0$.

Neka su T_0' i T_1' ortogonalne projekcije točaka T_0 i T_1 na os apscisa (sl. 2).

Promatrajmo pravokutne trokute $OT_1'T_1$ i $OT_0'T_0$, njihove visine na pripadne hipotenuze označimo s v_1, v_0, a ploštine tih trokuta s P_1, P_0.

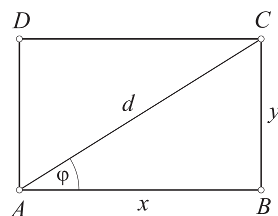
Očito vrijedi nejednakost: $v_0\geqslant |T_1'E|\geqslant v_1 \implies v_0\geqslant v_1$. Sada vrijedi slijed nejednakosti: $v_0\geqslant v_1 \implies rv_0\geqslant rv_1 \implies 2P_0\geqslant 2P_1 \implies x_0y_0\geqslant x_1y_1$.

Kako je $x_0=y_0$, to je $x_0y_0=x_0^2=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{2}=\dfrac{r^2}{2}=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, odakle zaključujemo da je $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant x_1y_1$, za svaki $x\leqslant x_1$, $y\geqslant y_1$, a jednakost vrijedi samo za $x=y=x_1=y_1$.

Na potpuno isti način postupamo ako je $x_2\leqslant x_0$, $y_2\geqslant y_0$, tj. za točku $T_2(x_2,y_2)$. U ovom slučaju točke T_0 i T_2 projiciramo na os ordinata i dobijemo $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant x_2y_2$.

Time smo dokazali da, za svaka dva pozitivna broja x, y vrijedi $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$, pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je $x=y$, tj. dokazali smo poučak o jednakosti aritmetičke i geometrijske sredine.

3. Za svaka dva pozitivna realna broja x, y postoji $d\in\mathbf{R}^+$ i $\varphi\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, tako da je $x=d\cos\varphi$, $y=d\sin\varphi$. To se lako vidi, nacrta li se pravokutnik $ABCD$, kojemu je $|AB|=x$, $|BC|=y$, tada je $d=|AC|$, $\varphi=\sphericalangle CAB$, sl. 3.



Slika 3.

Za površinu P pravokutnika vrijedi:

$$P=xy=d\cos\varphi\cdot d\sin\varphi=\frac{1}{2}d^2\sin 2\varphi\leqslant\frac{1}{2}d^2,$$

$$\text{tj.}\quad xy\leqslant\frac{1}{2}d^2. \tag{5}$$

Jednakost u (5) vrijedi ako i samo ako je $\sin 2\varphi=1 \iff \varphi=\dfrac{\pi}{4} \iff x=y$.

Po Pitagorinom poučku je

$$d^2=x^2+y^2. \tag{6}$$

Iz (5) i (6) neposredno slijedi $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$, čime je nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine dokazana.



Quine: samoreproducirajući kod

Dino Sejdinović[1]*, Bristol, Ujedinjeno Kraljevstvo*

Quine je program koji sam sebe reproducira, odnosno koji ispisuje vlastiti kod. Naime, jedna od posljedica teorema o rekurziji koja omogućuje da se aksiomatski zasnuju prirodni brojevi je i ta da se samoreproducirajući algoritmi mogu implementirati u svakom programskom jeziku koji posjeduje mogućnost ispisivanja znakovnih nizova (dakle, i u takvim egzotičnim jezicima kakav je Brainf*?#). Dakako, program koji sam sebe reproducira, odnosno čija se kompletna svrha svodi na to da ispiše svoj kod na ekranu nakon što se pokrene, slabo da ima neki praktični značaj i teško da će komercijalno orijentirani informatičari i programeri njime biti imalo impresionirani. Značaj Quinea je, dakle, isključivo zabavno-teorijske prirode!

Quine je dobio ime po **Willardu Van Ormanu Quineu** (1908. – 2000.), čuvenom američkom matematičaru, logičaru i filozofu. Ideja o samoreproducirajućim programima javila se sedamdesetih godina u članku [1], a prvi poznati Quine napisao je **Hamish Dewar**, tada predavač na Sveučilištu u Edinburghu u jeziku *Atlas Autocode* iz porodice davno zaboravljenog programskog jezika ALGOL. U širem smislu, Quine predstavlja zajednički naziv za samoreproducirajuće instrukcije. Najjednostavniji primjer takve instrukcije je vjerojatno:

Quine 1: Napiši ovu rečenicu.

Ovdje navodimo dva primjera samoreproducirajućih programa u C++ programskom jeziku (besplatni kompajler *dev-cpp* koji se najčešće koristi u edukativne svrhe), kao i jedan *obrnuto reproducirajući* program. Prvi Quine za ispis koristi `printf()` funkciju (dakle, radi se o više C-like strategiji), a drugi `cout` izlazni tok, preko jedne pomoćne funkcije, stereotipno nazvane `f`, čiji se kod također ispisuje. Iako su ovi kodovi samoreproducirajući, oni nisu i samopojašnjavajući. No, ipak je njihova logika rada znatno više zdravorazumska, ako je ta riječ u ovom kontekstu uopće primjenjiva, od mnogih Quineova za koje je činjenica da rade nešto smisleno, naprosto nevjerojatna.

Porodica samoreproducirajućih kodova je prilično bogata. Pored toga što postoje Quineovi u svim više ili manje poznatim programskim jezicima, postoje i Quineovi koji ispisuju svoj kod naopačke ("obrnuti" Quineovi – jedan takav je i navedeni), palindromni Quineovi, pa čak i Quineovi koji vlastiti kod ispisuju u obliku spirale, što vodi zaključku da postoje programeri s mnogo slobodnog vremena. Napisati vlastiti Quine je možda postala i granica programerskih sposobnosti. Da bi se napisao ispravan Quine potrebno je mnogo strpljenja i upornosti, a nakon što se prva barijera probije, sljedeći izazov je napisati što kraći (time i nerazumljiviji) Quine. Slijede dva "normalna" Quinea, koje je autor ovih redaka napisao jedne besane zimske noći.

---

[1] Autor je djelatnik u Centre for Communications Research, Department of Electrical & Electronic Engineering, University of Bristol, United Kingdom; e-mail: `D.Sejdinovic@bristol.ac.uk`

Quine 2:

```
//QUINE - program koji sam sebe ispisuje
#include<iostream>
#include<conio.h>
using namespace std;
int main(){
char*a="//QUINE - program koji sam sebe
ispisuje%c#include<iostream>%c#include<conio.h>%cusing namespace
std;%cint
main(){%cchar*a=%c%s%c%cprintf(a,10,10,10,10,10,34,a,34,10,10);%cg
etch();return 0;}";
printf(a,10,10,10,10,10,34,a,34,10,10);
getch();return 0;}
```

Quine 3:

```
#include<iostream>
#include<conio.h>
using namespace std;void f(char*a){char b[]=
{'f','(','a',')',';','g','e','t','c','h','(',')',';','r','e','t','
u','r','n','
','0',';','}'};cout<<a<<char(34)<<a<<char(34)<<';'<<b;}int
main(){char*a="#include<iostream>#include<conio.h>using namespace
std;void f(char*a){char b[]=
{'f','(','a',')',';','g','e','t','c','h','(',')',';','r','e','t','
u','r','n','
','0',';','}'};cout<<a<<char(34)<<a<<char(34)<<';'<<b;}int
main(){char*a=";f(a);getch();return 0;}
```

Obično se pri analizi manjih programa u raznim priručnicima navode dvije stvari: sami kod programa – dakle, naredbe pomoću kojih ostvarujemo zadani cilj – i njegov izlaz, tj. cilj koji smo željeli postići. Kad je Quine u pitanju, kod programa JESTE njegov izlaz, ili jedina svrha naredbi jesu one same! Detaljnu analizu ovih kodova prepuštamo čitaocu. Svaki čitalac koji poznaje osnove programskog jezika C ili programskog jezika C++ može uz nešto truda razumjeti kako funkcioniraju ovi programi. Također, pozivamo zainteresirane čitaoce da trenutke odmora i razbibrige zamijene bezrazložnim nerviranjem tokom grčevite borbe sa svojim omiljenim programskim jezikom i kompajlerom kako bi ga natjerali da, ono što unesete kao komande, on doslovno ponovi! Napišite svoj Quine! Napominjemo da je onaj tko u svom kodu jednostavno iščita datoteku u kojoj je smješten kod programa u tekstualnom obliku varalica i da se takvi programi ne smatraju Quineovim. Suština Quinea je upravo samoreprodukcija sadržana u svim dijelovima njegovog koda, a ne u jednoj jedinoj njegovoj komandi.

Da dodatno začinimo stvari, ovdje ćemo navesti još jedan program. Radi se o "obrnutom" Quineu, također pisanom u C++ programskom jeziku. On ispisuje svoj kod unatraške (znak po znak), s tim što ne ispisuje pretprocesorske naredbe. Prepravke neophodne da bi se ispisivale i pretprocesorske naredbe su trivijalne, samo što bi program tada bio još glomazniji. Interesantno je da ovaj (obrnuti) Quine koristi sličnu (samo obrnutu) logiku kao i **Quine 3**. Također imamo pomoćnu funkciju koja sada ispisuje odgovarajuće stringove u obrnutom poretku. String `b` u ovom programu je u odnosu na odgovarajući u prethodnom samo obrnutog poretka, a da bi ovako koncipiran program ispravno radio neophodno je da string `a` bude palindroman.

Quine 4 (obrnuti Quine):

```
#include<iostream>
#include<conio.h>
using namespace std;
void f(char*a){char b[]={'}',';','0','
',n','r','u','t','e','r',';',')','(','h','c','t','e','g',';',')',
'a','(','f'};
cout<<b<<';'<<char(34)<<a<<char(34)<<a+178;}
int main(){char*a="void f(char*a)char b[]={'}',';','0','
',n','r','u','t','e','r',';',')','(','h','c','t','e','g',';',')',
'a','(','f'};cout<<b<<';'<<char(34)<<a<<char(34)<<a+178;}int
main(){char*a==a*rahc{)(niam
tni};871+a<<)43(rahc<<a<<)43(rahc<<';'<<b<<touc;}'f','(','a',')','
;','g','e','t','c','h','(',')',';','r','e','t','u','r','n','
','0',';','}'{=][b rahc)a*rahc(f diov";
f(a);getch();return 0;}
```

Literatura

[1] P. BRATLEY, J. MILLO, *Computer Recreations; Self-Reproducing Automata*, Software-Practice & Experience, Vol. 2 (1972). pp. 397–400.

[2] J. BURGER, D. BRILL AND F. MACHI, *Self-reproducing programs*, Byte, Vol. 5, (1980). pp. 74–75.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Quine_(computing)

[4] http://www.nyx.net/∼gthompso/quine.htm

⋆ ⋆ ⋆

Broj π

Godine 1997. u časopisu Mathematical Intelligencer u članku pod naslovom *The quest for Pi* matematičari D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. M. Borwein i S. Plouffe objavili su sljedeću formulu za broj π, pomoću koje se ovaj može vrlo brzo izračunati s velikom točnošću,

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right).$$

Već za $n = 5$ dobije se točnost na 9 decimala. Može se pokazati da je za proizvoljan broj n greška manja od $\varepsilon = \frac{1}{16^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$.



Određivanje Lorenzovog broja metala

Josip Paić[1], *Šibenik*

Uvod

Nosioci električne struje u metalima su slobodni elektroni. Da bi se oni mogli usmjereno gibati kroz metalni vodič, moramo krajeve vodiča staviti na različite potencijale, tj. između njegovih krajeva uspostaviti napon. Kvocijent napona na krajevima vodiča U i jakosti struje kroz vodič I je električni otpor vodiča R

$$R = \frac{U}{I}. \tag{1}$$

Usporedba otpornih svojstava različitih metala ne može se vršiti uspoređivanjem njihova električnog otpora jer se ne bi dobio pravi uvid u sama svojstva tvari. Električni otpor ovisi i o geometrijskom obliku i dimenzijama uzorka. Pri uspoređivanju žica jednakog presjeka A i jednake duljine l, ali od različitih metala, razlika u električnom otporu javlja se samo zbog posebnih svojstava samih metala

$$R = \rho\frac{l}{A}. \tag{2}$$

Konstanta proporcionalnosti ρ je za određenu tvar konstantna i prava je osobina tvari a naziva se električna otpornost.

Odredivši toplinsku vodljivost bakra (postupkom opisanim u "Određivanje toplinske vodljivosti metala" u rubrici "Iz moje radionice i laboratorija" Matematičko-fizičkog lista broj 3/ 227, god. LVII, 2006.–2007.) i njegovu električnu otpornost, može se provjeriti *Wiedemann-Franzov zakon* koji kaže da je omjer toplinske vodljivosti metala κ s njegovom temperaturom T i električnom vodljivosti σ je konstantan i jednak Lorenzovom[2] broju L_0:

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = L_0. \tag{3}$$

Izrazimo li električnu vodljivost pomoću električne otpornosti

$$\sigma = \frac{1}{\rho}, \tag{4}$$

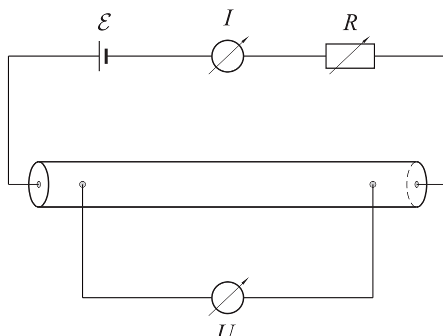
Wiedemann-Franzov zakon možemo napisati u obliku

$$\frac{\kappa\rho}{T} = L_0. \tag{5}$$

[1] Autor je magistar znanosti iz didaktike prirodnih znanosti, usmjerenje fizika, i profesor na gimnaziji Antuna Vrančića u Šibeniku, e-mail: `Josip.Paic@pmfst.hr`.

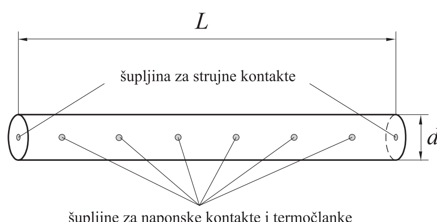
[2] Lorenz, Ludwig Valentin (1829.–1891.), danski fizičar. Uz optiku, istraživao je elektricitet i magnetizam.

Električni otpor metala možemo odrediti pomoću sklopa prikazanog na slici 1.



Slika 1. Sklop za mjerenje električnog otpora metalne šipke.

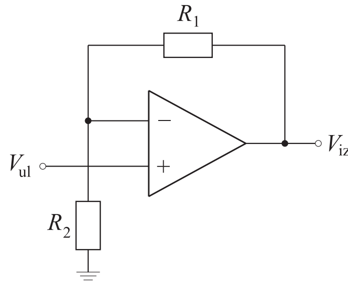
Njegov glavni dio je metalna šipka od bakra, duljine L između 20 i 30 cm, a promjera poprečnog presjeka d, od 2 do 3 cm, korištena i pri mjerenju toplinske vodljivosti (slika 2).



Slika 2. Shema metalne šipke za mjerenje električne otpornosti.

Za lakše mjerenje električne otpornosti šipke u središtima je njezinih baza probušena po jedna rupa promjera poprečnog presjeka 2 mm ili 4 mm u koje se umeću banana-utičnice kroz koje se šalje električna struja, a na krajevima njenog plašta izbušena je također, po jedna rupa promjera do 4 mm u koje se umeću banana-utičnice kako bismo mogli mjeriti napon stvoren na njoj. Krajevi šipke se priključe na izvor promjenjiva napona, a u seriju s njim se spoji ampermetar i reostat (promjenjivi otpornik). Na izvoru se podesi napon na 6 V, a pomoću reostata se mijenja jakost struje kroz šipku. U rupe izbušene pri krajevima plašta se priključi pojačalo i voltmetar.

Red veličine električne otpornosti metala je 10^{-7} Ωm, što nam za otpor šipke s naponskim kontaktima udaljenim 20 cm i promjera poprečnog presjeka od 3 cm daje red veličine od 10 $\mu\Omega$. Uz struju kroz šipku od 1 A, napon koji bi se mjerio bio bi reda veličine 10 μV. Pošto tipično školski voltmetri / multimetri nemaju tako visoku osjetljivost, prije mjerenja je tako male napone potrebno pojačati. Principijelna shema relativno jeftinog i lako sklopivog neinvertirajućeg operacijskog pojačala je dana na slici 3. (Mi smo koristili operacijsko pojačalo LM 741, koje se može nabaviti u svakoj malo bolje opskrbljenoj trgovini elektroničkim dijelovima).



Slika 3. Principijelna shema elektroničkog pojačala signala s operacijskim pojačalom.

Pojačanje G pojačala je definirano omjerom otpora otpornika R_1 i R_2,

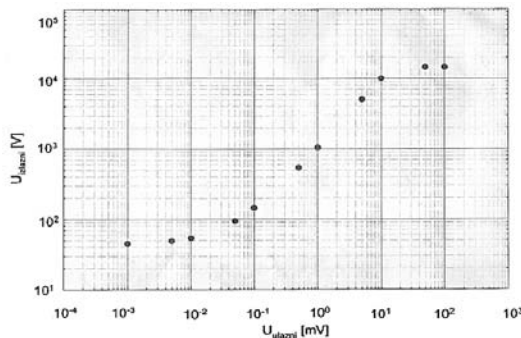
$$G = 1 + \frac{R_1}{R_2}, \tag{6}$$

te se u praksi mogu postići pojačanja i preko 1000 puta.

Da bi se mogao odrediti ulazni napon između naponskih kontakata na šipki, pojačalo je najprije potrebno baždariti (tablica 1. i slika 4.).

	U_{ulazni} [mV]	$U_{izlazni}$ [mV]	$U_{izlazni}$ / U_{ulazni}
1	0.000	52	–
2	0.001	45	45000.0
3	0.005	49	9800.0
4	0.010	54	5400.0
5	0.050	94	1880.0
6	0.100	144	1440.0
7	0.500	542	1084.0
8	1.000	1040	1040.0
9	5.000	5020	1004.0
10	10.000	9999	999.9
11	50.000	14510	290.2
12	100.000	14510	145.1

Tablica 1. Baždarenje pojačala.



Slika 4. Karakteristika pojačala.

Mjerenjem jakosti struje koja teče kroz metalnu šipku i napona među naponskim kontaktima na njenom plaštu, pomoću jednadžbe (1) izračunamo električni otpor. Električna otpornost se računa po formuli

$$\rho = R \cdot \frac{A}{l}, \tag{7}$$

gdje je l udaljenost između naponskih kontakata, a A površina poprečnog presjeka šipke. U našem pokusu šipka je bakrena, duljine 30 cm, promjera 2 cm, a udaljenost između naponskih kontakata je 20 cm.

Na slici 5 prikazan je eksperimentalni uređaj za određivanje električne otpornosti bakrene šipke (napravljen u Gimnaziji Antuna Vrančića u Šibeniku).



Slika 5. Eksperimentalni uređaj za određivanje električne otpornosti bakrene šipke.

Na opisani način izvršena su mjerenja i izračunati električna otpornost, električna vodljivost i Lorenzov broj za bakrenu šipku te podaci uneseni u tablicu 2.

U_{izl} [V]	U_{ul} [mV]	I [A]	R [Ω]	σ [$\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$]	ρ[Ωm]	L[$\mathrm{W\Omega K^{-2}}$]	$\overline{L}$[$\mathrm{W\Omega K^{2}}$]
0.094	0.050	3.35	$1.49 \cdot 10^{-5}$	$4.267 \cdot 10^{7}$	$2.343 \cdot 10^{-8}$	$3.526 \cdot 10^{-8}$	
0.100	0.051	3.75	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$4.683 \cdot 10^{7}$	$2.135 \cdot 10^{-8}$	$3.213 \cdot 10^{-8}$	$3.113 \cdot 10^{-8}$
0.118	0.060	5.45	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$5.7855 \cdot 10^{7}$	$1.728 \cdot 10^{-8}$	$2.600 \cdot 10^{-8}$	

Tablica 2. Podaci mjerenja i izračunate vrijednosti električnog otpora, električne vodljivosti i Lorenzovog broja za bakrenu šipku.

Iz rezultata pokusa je vidljivo da kako se povećavala jakost struje, to su tražene vrijednosti električne otpornosti i električne vodljivosti kao i Lorenzovog broja metala, točnije. To je, vjerojatno, posljedica ravnomjernije raspodjele gustoće struje duž čitavog poprečnog presjeka bakrene šipke. No, poteškoća je što električnu struju dalje nije preporučljivo povećavati jer korišteni reostat može izdržati struje do 6 A.

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u jednadžbu (6) (uz $\kappa = 456\ \mathrm{WK^{-1}m^{-1}}$, dobiveno pri određivanju toplinske vodljivosti, i $T = 303$ K) za Lorenzov broj dobivamo $L_0 = (3.1 \pm 0,5) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\Omega K^{-2}}$.

Sommerfeldov model metala za Lorenzov broj daje $L_0 = 2.45 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\Omega K^{-2}}$. Uočavamo da odstupanje dobivenih vrijednosti iznosi od 6% do 36% relativnog odstupanja od tablične vrijednosti. Svakako, da u obzir moramo uzeti pogreške pri određivanju toplinske vodljivosti koje su iznosile oko dvadesetak posto. Dakle, usavršavanjem uređaja za mjerenje toplinske vodljivosti i nabavkom reosta koji može izdržati struju do 10 A, rezultati za Lorenzov broj bit će točniji.



Mira – čudesna zvijezda

Matko Milin[1], *Zagreb*

Najsjajnije zvijezde u zviježđima obilježavaju se redom slovima grčkog alfabeta (a zatim i brojkama); npr. Sirijus je α Velikog Psa, a Rigel β Oriona. Na prvi pogled ne bi se stoga očekivalo da se iza oznake o Kita (omikron je 15. slovo grčkog alfabeta) krije jedna od najzanimljivijih zvijezda (ponekad) vidljivih golim okom: zvijezda imena Mira koja i dan danas novim rezultatima iznenađuje astronome.

Za tu je zvijezdu još davne 1596. godine njemački astronom David Fabricus uočio da mijenja sjaj, no on je neispravno sugerirao da do te promjene dolazi jer je riječ o novoj zvijezdi. Periodičnu promjenjivost više je astronoma uočilo tek za 50-tak godina, da bi joj njemački astronom Johann Hevelius (koji ju je redovito promatrao od 1659. do 1682. godine) dao ime Mira, (*lat.* čudesna ili čudnovata).

Mira se nalazi na udaljenosti od oko 420 godina svjetlosti od Zemlje, a masom je vrlo slična Suncu. Što je toliko neobično kod te zvijezde? Prvo, njezin promjenjiv sjaj: riječ je o zvijezdi koja s periodom od oko 332 dana mijenja sjaj od prividne zvjezdane veličine $m = 3$ do $m = 9$ i natrag[2]. Period promjene nije posve stalan, kao ni maksimalan i minimalan sjaj: minimumi variraju između $m = 1.7$ i 5.0, dok su maksimumi između $m = 8.0$ i 9.5. Dakle, otprilike dvije trećine vremena ova zvijezda nije vidljiva golim okom (prosječno oko pri dobrim atmosferskim uvjetima primjećuje zvijezde s $m < 5 - 6$) i time je Mira jedina zvijezda koja ima "normalno" ime (a ne samo oznaku), a da je veći dio vremena nevidljiva golim okom. Uzmemo li u obzir udaljenost ove zvijezde, može se izračunati da Mira u minimumu zrači manje od Sunca dok u maksimumu zrači čak i 1000 puta više!

Razloge takvog neobičnog ponašanja treba tražiti u evolucijskoj fazi u kojoj se nalazi ova zvijezda. Prije nekih par milijardi godina, Mira je ličila današnjem Suncu, no u međuvremenu je uglavnom potrošila vodik i helij kao gorivo za nuklearnu fuziju. Mira je dakle relativno stara zvijezda, tzv. crveni div, čija je površinska temperatura niska (od 2000 K do 3000 K), no čiji je promjer ogroman – u maksimumu čak 400 puta veći od Sunčevog (podsjećamo da su mase skoro jednake). I dok je izotermna jezgra ove i sličnih promjenjivih zvijezda vrlo malena i u stanju degeneriranog plina, plašt zvijezde je konvektivan i uzburkan. U tom plaštu nalazi se sloj helija koji djeluje kao spremište energije pri pulsiranju zvijezde i koji utječe na promjenu površinske temperature pa time i sjaja zvijezde. Mehaničkim pulsiranjem dolazi do relativno pravilne promjene sjaja – u našoj galaksiji poznato je otprilike 1000 zvijezda koje se ponašaju na taj način i koje se zbog toga nazivaju "Miride".

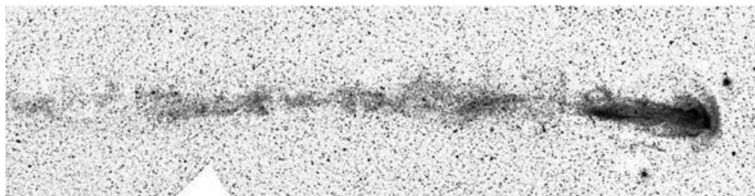
Spomenimo još par poznatih činjenica o Miri. Kao prvo, ona je dvojna zvijezda – druga komponenta tog dvojnog sustava ima sjaj oko $m = 10$ i nema veze s promjenom sjaja same Mire. Nadalje, nedavne snimke napravljene Hubbleovim teleskopom pokazale

---

[1] matko.milin@phy.hr, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu

[2] Skala zvjezdanih veličina je logaritamska; najsjajnije zvijezde su prve veličine, u odnosu na njih zvijezde druge veličine osvjetljavaju oko ≈ 2.5 puta slabije, zvijezde treće veličine još 2.5 slabije itd.

su da je Mira toliko neobična i nestabilna zvijezda da nije čak ni okrugla (podsjetimo da joj je polumjer ogroman, veći od udaljenosti Sunca do Marsa!).



Slika 1. Mozaična slika Mire u ultraljubičastom dijelu elektromagnetskog spektra, sastavljena od više slika napravljenih satelitom GALEX. Sama zvijezda je blizu desnog ruba slike, desno od nje može se vidjeti udarni val, a lijevo rep dugačak 13 svjetlosnih godina. Slika: NASA / JPL-Caltech.

I na kraju, par riječi o najnovijim neobičnim rezultatima [1] za ovu zvijezdu vezanim za sliku 1. Prvi pogled na tu sliku čovjeka asocira na ideju da je u pitanju slika kometa – no prava je istina da je riječ o slici Mire u ultraljubičastom spektru (slika je dobivena NASA-nim satelitom GALEX čiji je zadatak mapiranje čitavog neba u tom dijelu elektromagnestkog spektra). Ono što se jasno vidi na slici je rep iza zvijezde, dugačak čak 13 svjetlosnih godina! Nikad prije nije primijećeno da neka zvijezda ima rep, a prve spektralne analize pokazuju da rep sadrži ugljikove, dušikove i kisikove molekule.

Kako je došlo do nastanka ove neobične pojave? Podsjetimo se prvo da Mira ima masu kao Sunce, a da joj je polumjer 400 puta veći! Gravitacija u takvoj situaciji teško zadržava atmosferu zvijezde i u normalnim uvjetima (druga kozmička brzina je mala). Uz to, Mira kroz međuzvjezdani materijal putuje vrlo brzo: brzinom od oko 130 kilometara u sekundi, dvostruko brže od prosječnih zvjezdanih brzina. Nadalje, dio međuzvjezdanog prostora kroz koji putuje Mira bitno je gušći od prosječnog. Najuvjerljivije objašnjenje repa Mire kaže da on nastaje kada u interakciji zvjezdane atmosfere i materijala u međuzvjezdanom prostoru nastaje udarni val kojim se materijal u atmosferi zagrijava i još lakše oslobađa gravitacijskog utjecaja zvijezde. U konačnici materijal zbog toga zaostaje za zvijezdom i ostavlja trag na putu kojim je zvijezda prošla. Još nije posve jasno zašto se rep vidi samo u ultraljubičastom dijelu spektra (zgodno je primijetiti da Mira zbog niske temperature najviše zrači u infracrvenom području). Dužina repa i brzina gibanja Mire pokazuju nam da ona na ovaj način materijal gubi već 30 000 godina i to otprilike masu jednaku masi Zemlje svakih 10-tak godina. Detaljnije proučavanje ovog fenomena možda će odati i detalje tog procesa, a time i načina na koji "umiruće" zvijezde šire Svemirom materijal koji je u njima nastao nuklearnim reakcijama. . .

Mira je prije milijardu godina bila slična Suncu. Proučavajući ju dobivamo direktan uvid u daleku budućnost nama najbliže zvijezde. Otkriće Mirinog repa i njegovo buduće istraživanje zasigurno će tome bitno pridonijeti. Spomenimo na kraju da će sljedeći maksimum sjaja Mira imati između 1. i 10. siječnja 2008. godine – možete je dakle golim okom uočiti na nebu već od početka jeseni i pratiti rast njenog sjaja do Nove godine. Ne propustite!

Literatura

[1] C. Martin i suradnici, *A turbulent wake as a tracer of 30 000 years of Mira's mass loss history*, Nature 448 (2007) 780.

ZABAVNA MATEMATIKA

Magični kvadrat 5x5

Prve sate matematike u novoj školskoj godini profesor Dobrić posvećuje jednostavnim zadacima, najčešće iz zabavne matematike. Ni ovaj puta nije bilo drugačije. Profesor je najprije nacrtao kvadrat 5×5, u njega upisao prvih dvanaest parnih prirodnih brojeva, a onda se obratio razredu:

— U prazna polja kvadrata trebate upisati prvih trinaest neparnih prirodnih brojeva, ali tako da zbrojevi brojeva u recima, stupcima i na obje dijagonale budu jednaki.

18	24		6	12
10				4
22				16
14	20		2	8

Učenici su odmah prionuli na posao. Dovršite i vi ovo upisivanje.

Dogodilo se ovog ljeta

Pet mladih parova okupilo se na početku jeseni kod jednog od mladića. Bilo je smijeha kad ih je domaćin podsjetio na šaljivu zgodu sa zajedničkog odmora na moru:

— Jedne nedjelje odlučili smo se kupati na obližnjem otočiću. Za prijevoz imali smo na raspolaganju samo čamac u koji su mogle stati najviše tri osobe. Svaki od mladića postavio je uvjet da njegova djevojka ne može biti u društvu s nekim drugim mladićem ako nije i on nazočan. Bili smo ljubomorni, zar ne?!

— Tko se sjeća kako smo se uopće prebacili na otočić? — upitali su svi istovremeno.

Zaista, kako?



Formula 1

Prije starta trke za veliku nagradu "Zlatni volan" pet automobilista A, B, C, D i E proglašeno je favoritima. Izdvajamo pet prognoza

DCAEB
EADBC
BDAEC
CABDE
DEBCA

Na kraju trke ustanovilo se da su u svakoj od ovih prognoza pogođena mjesta dvojice automobilista. Možete li na temelju tih prognoza reći konačan poredak prve petorice?

Zagonetni račun

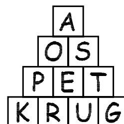
U prvoj domaćoj zadaći Tomislav je imao i zadatak rekonstrukcije donjeg računa množenja. Naglas je razmišljao: "Profa je rekao da je to jednostavan i lagan račun množenja prirodnih brojeva i da treba odrediti vrijednost za MONOM. Njemu je sve lagano! Hm, da ja to ipak pogledam malo pažljivije."

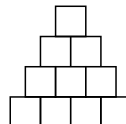
MONOM x 999 = ... 726

Pogledajte i vi.

Susjedi

Od deset različitih slova načinjeni su pojmovi A, OS, PET, KRUG i upisani u prvu piramidu. Svako od slova ima određeni broj susjeda. Razmjestite ta slova u prazna polja druge piramide tako da svako slovo dobije nove susjede.





Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2007. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/ 231.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

3063.* Odredi sva rješenja (x, y, z) sistema jednadžbi

$$(x+y)(x+y+z) = 90,$$
$$(y+z)(x+y+z) = 105,$$
$$(z+x)(x+y+z) = 255.$$

3064. Izračunaj

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{2006+\cfrac{1}{2007}}}}}}} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{2006+\cfrac{1}{2007}}}}}}}.$$

3065. Ako su a i b duljine stranica trokuta, čija je površina jednaka $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, odredi njegove kutove.

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

3066.* Poluopseg tetivnog četverokuta je s, a njegova površina P. Ako je $P = \left(\frac{s}{2}\right)^2$, dokaži da je ovaj četverokut kvadrat.

3067. Skiciraj u kompleksnoj ravnini sve kompleksne brojeve z za koje je

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z}\right)^6 = 0.$$

3068. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 + 3\log_{100x} 10 = 0.$$

3069.* Na stranicama $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ pravokutnika $ABCD$ dane su točke M i N. Dokaži da je površina presjeka trokuta ABN i BCM jednaka površini onog dijela pravokutnika koji je izvan ova dva trokuta.

3070.* Ako su površine trokuta određenih bazama trapeza i sjecištem njegovih dijagonala jednake p^2 i q^2, dokaži da je površina trapeza jednaka $(p+q)^2$.

3071. Kružnice K_1, K_2, K_3 se u parovima dodiruju izvana. Neka su A, B, C točke dodira K_1 i K_2, K_1 i K_3, K_2 i K_3, tim redom. Pravac AB siječe K_2 i K_3 u D i E, tim redom. Pravac DC po drugi put siječe K_3 u točki F. Dokaži da je trokut DEF pravokutan.

3072. Točka O je središte opisane kružnice trokuta ABC, $\overline{CD}$ je njegova težišnica, a E je težište trokuta ACD. Dokaži da je OE okomito na CD ako i samo ako je trokut ABC jednakokračan, pri čemu je $|AB| = |AC|$.

3073. Dužine $\overline{AH}$, $\overline{BK}$, $\overline{CL}$ su visine proizvoljnog trokuta ABC. Dokaži jednakosti

$$|AK|\cdot|BL|\cdot|CH| = |AL|\cdot|BH|\cdot|CK|$$
$$= |HK|\cdot|KL|\cdot|LH|.$$

3074. Dokaži da u svakom trokutu vrijedi

$$\frac{s}{R} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

gdje je s njegov poluopseg.

3075. Odredi ravninski kut pri vrhu pravilne čeverostrane piramide, ako se središte upisane podudara sa središtem opisane joj sfere.

3076. Četiri broja su uzastopni članovi geometrijskog niza. Njihov zbroj je 13, a zbroj njihovih kvadrata je 1261. Odredi te brojeve.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 266. Zahvaljujući posebnoj bjelančevini u koju pohranjuje energiju, buha veličine 3 mm može skočiti u vis 33 cm. Kad bi ljudi mogli skakati kao buhe, proporcionalno s visinom, koliko bi u vis mogao skočiti čovjek visok 180 cm? Koliko bi energije potrošio za takav skok ako mu je masa 75 kg?

OŠ – 267. Kamen obujma 5 litara ima gustoću $3200\ \mathrm{kg/m^3}$.

a) Koliko bi pokazala vaga kad bi ga vagali na kopnu?

b) Koliko bi pokazala vaga kad bi ga vagali uronjenog u vodu?

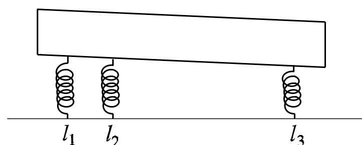
OŠ – 268. Izračunajte promjer i površinu mrlje koja bi nastala kad bi se decilitar ulja izlio na pučini za vrijeme potpune bonace. Pretpostavite da bi mrlja bila kružnog oblika i da bi se sve molekule ulja poredale jedna do druge. Dimenzije molekule ulja su 2.5 nm (2.5 milijuntnine milimetra).

OŠ – 269. Kad je žaruljica spojena na napon 1.5 V kroz nju teče struja 0.125 A, na naponu od 3 V struja kroz žaruljicu iznosi 0.2 A, a kad je napon izvora 4.5 V struja je 0.225 A. Izračunajte električni otpor žaruljice u sva tri slučaja i objasnite zašto se on mijenja.

1371. Metak izlazi iz puščane cijevi brzinom od 800 m/s. Cijev je duga 2 m. Nađite prosječnu akceleraciju metka u cijevi. Ako je ispaljen horizontalno s visine 1.6 m, na kojoj će udaljenosti pasti na zemlju. Zanemarite otpor zraka.

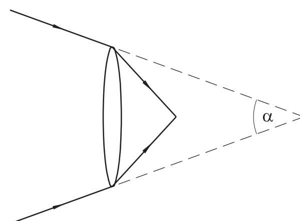
1372. Sat njihalica ide točno na $0\,^\circ\mathrm{C}$. Koliko zaostane za 1 dan na temperaturi $20\,^\circ\mathrm{C}$? Linearni koeficijent rastezanja niti je $\beta = 1.7\cdot 10^{-5}/^\circ$. Pretpostavite matematičko njihalo.

1373. Greda mase m i duljine l leži pričvršćena na tri identične opruge konstante k kao na slici. Opruge se nalaze na udaljenostima l_1, l_2 i l_3 od jednog kraja grede. Kolikim silama opruge djeluju na gredu u ravnoteži?



1374. Dokažite da se prilikom elastičnog sudara dvije nerelativističke čestice jednake mase raspršuju pod pravim kutom u sustavu u kojem je jedna čestica mirovala prije sudara.

1375. Konvergentni snop svjetlosti oblika stošca kuta $\alpha = 40^\circ$ pada na tanku leću promjera 20 cm i jakosti 5 dioptrija. Koji je novi kut stošca (vidi sliku)?



1376. Atomska masa prirodnog bora je 10.811. On se sastoji od dva izotopa masa 10.013 i 11.009. Nađite njihove udjele.

1377. Osam identičnih žica otpora r spojeno je tako da čine bridove kocke. Koliki je ekvivalentni otpor između dva suprotna vrha na prostornoj dijagonali?

C) Rješenja iz matematike

3035. *Neka su a, b, c i α, β, γ pozitivni realni brojevi takvi da je $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Dokaži nejednakost*

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+2\sqrt{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha(ab+bc+ca)}\le a+b+c.$$

Prvo rješenje. Dana nejednakost je homogena po varijablama a, b i c pa možemo pretpostaviti da vrijedi $a+b+c=1$.

Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi:

$$2\sqrt{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(ab+bc+ca)} \leqslant \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+ab+bc+ca. \quad (1)$$

Kako vrijedi

$$\alpha+\beta+\gamma = 1 \quad \text{i} \quad a+b+c=1,$$

imamo

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{2} \quad \text{i}$$

$$ab+bc+ca=\frac{1-a^2-b^2-c^2}{2},$$

odnosno

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+ab+bc+ca = 1-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+a^2+b^2+c^2}{2}. \quad (2)$$

Iz očigledne nejednakosti

$$(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+(\gamma-c)^2 \geqslant 0,$$

slijedi

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+a^2+b^2+c^2}{2} \geqslant a\alpha+b\beta+c\gamma,$$

pa koristeći to u (2) dobivamo

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+ab+bc+ca \leqslant 1-a\alpha-b\beta-c\gamma. \quad (3)$$

Iz nejednakosti (1) i (3) vrijedi tražena nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=\gamma$.

Drugo rješenje. U ovom rješenju ćemo dva puta primijeniti Cauchy-Schwarzovu nejednakost.

Primjenjujući ovu nejednakost vrijedi:

$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geqslant (a\alpha+b\beta+c\gamma)^2,$$

odnosno

$$a\alpha+b\beta+c\gamma \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

pa vrijedi

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+2\sqrt{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(ab+bc+ca)} \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} + \sqrt{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}\cdot\sqrt{2(ab+bc+ca)}. \quad (1)$$

Opet primjenjujući Cauchy-Schwarzovu nejednakost vrijedi:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} + \sqrt{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}\cdot\sqrt{2(ab+bc+ca)}$$
$$\leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}$$
$$= \sqrt{(a+b+c)^2}\cdot\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)^2}=a+b+c \quad (2)$$

pa iz (2) u (1) slijedi

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+2\sqrt{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(ab+bc+ca)} \leqslant a+b+c.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$a=\alpha, \quad b=\beta, \quad c=\gamma.$$

Mehmed Brkić (4),
Druga gimnazija, Sarajevo, BiH

3036. *Odredi kutove* α, β, γ *trokuta* ABC *ako za duljine njegovih stranice* a, b, c *vrijedi*

$$a+2b+3c=2\sqrt{ac}+4\sqrt{bc}.$$

Rješenje. Danu jednakost možemo napisati kao

$$(a-2\sqrt{ac}+c)+(2b-4\sqrt{bc}+2c)=0,$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{2b}-\sqrt{2c})^2=0,$$

iz čega proizlazi

$$(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2=0 \quad \text{i} \quad (\sqrt{2b}-\sqrt{2c})^2=0.$$

Ovi uvjeti bit će zadovoljeni ako i samo ako je $a=b=c$.

Stoga je trokut jednakostraničan pa je $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$.

Vanja Ubović (1),
Gimnazija P. Preradovića, Virovitica

3037. *Ako su* a *i* b *racionalni brojevi,* $a>1$, $b>0$ *i ako je* $ab=a^b$ *te* $\frac{a}{b}=a^{3b}$, *koliko je* a*?*

Rješenje. Logaritmiranjem zadanih jednadžbi po bazi a imamo:

$$\log_a ab=\log_a a^b,$$
$$\log_a a+\log_a b=b\log_a a,$$
$$\log_a b=b-1;$$
$$\log_a \frac{a}{b}=\log_a a^{3b},$$
$$\log_a a-\log_a b=3b\log_a a,$$

$$-\log_a b = 3b - 1,$$
$$\log_a b = 1 - 3b.$$

Odavde dobivamo

$$b - 1 = 1 - 3b \implies b = \frac{1}{2}.$$

Uvrstimo sada b u, npr. prvu jednadžbu:

$$a \cdot \frac{1}{2} = a^{\frac{1}{2}} \ / \ ^2, \qquad \frac{1}{4}a^2 = a.$$

Pošto je $a > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{4}a = 1 \implies a = 4.$$

Gabrijel Guberović (2),
Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška

3038. *Ako kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 imaju jednake module i ako su oni, u kompleksnoj ravnini, vrhovi jednakostraničnog trokuta, tada su brojevi z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1 također vrhovi jednakostraničnog trokuta. Dokaži!*

Rješenje. Imamo

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|,$$
$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| \iff$$
$$|z_3||z_1 - z_2| = |z_1||z_2 - z_3| = |z_2||z_3 - z_1| \iff$$
$$|z_1z_3 - z_2z_3| = |z_1z_2 - z_1z_3| = |z_2z_3 - z_1z_2|.$$

Udaljenosti između točaka z_1z_3, z_2z_3, z_1z_2 su jednake, odakle slijedi da su one vrhovi jednakostraničnog trokuta.

Haris Čaušević (3),
Treća gimnazija, Sarajevo, BiH

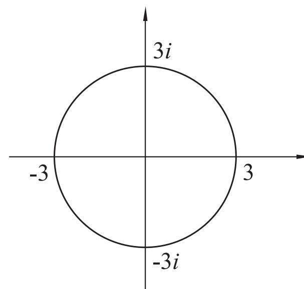
3039. *Odredi skup svih točaka z kompleksne ravnine koji je određen jednadžbom*

$$|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26.$$

Rješenje.

$$z = a + bi,$$
$$|a + bi - 2|^2 + |a + bi + 2|^2 = 26,$$
$$\left(\sqrt{(a-2)^2+b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(a+2)^2+b^2}\right)^2 = 26,$$
$$a^2 - 4a + 4 + b^2 + a^2 + 4a + 4 + b^2 = 26,$$
$$a^2 + b^2 = 9.$$

Traženi skup točaka z kompleksne ravnine je kružnica polumjera $r = 3$ sa središtem u ishodištu.



Sara Muhvić (3),
III. gimnazija, Osijek

3040. *Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC odabrane su točke M i N tako da je $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = k$. Točka Q je sjecište pravaca AN i CM. Dokaži da je površina četverokuta $MBNQ$ jednaka površini trokuta ACQ.*

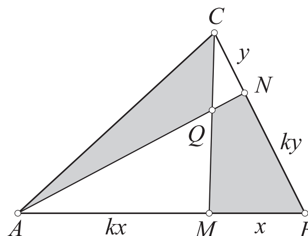
Rješenje. Označimo $|MB| = x$ i $|NC| = y$. Sada je $|AM| = kx$ i $|BN| = ky$.

Za površinu trokuta MBC vrijedi:

$$\frac{P_{\triangle MBC}}{x} = \frac{P_{\triangle ABC}}{kx + x} \quad \text{tj.} \quad P_{\triangle MBC} = \frac{P_{\triangle ABC}}{k + 1}.$$

Za površinu trokuta ANC imamo:

$$\frac{P_{\triangle ANC}}{y} = \frac{P_{\triangle ABC}}{ky + y} \quad \text{tj.} \quad P_{\triangle ANC} = \frac{P_{\triangle ABC}}{k + 1}.$$



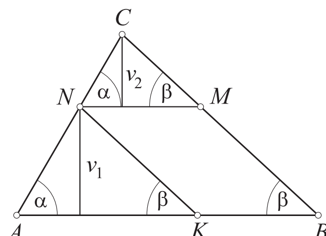
Iz ovoga se vidi da su površine trokuta ANC i MBC jednake pa je stoga očigledno da su jednaki dijelovi površina kojima se trokuti ne poklapaju, pa je stoga $P_{\triangle AQC} = P_{MBNQ}$.

Gabrijel Guberović (2), Nova Gradiška

3041. *Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC dane su redom točke K, M i N tako da je četverokut $KBMN$ paralelogram. Kolika je njegova površina ako je $P_{\triangle AKN} = P_1$ i $P_{\triangle NMC} = P_2$?*

Rješenje. Trokuti AKN i NMC su slični, pa je

$$\frac{|NM|}{|AK|} = \frac{v_2}{v_1} \implies |NM| \cdot v_1 = |AK| \cdot v_2.$$



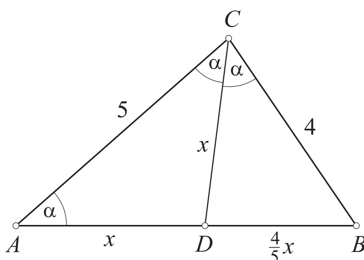
Površina paralelograma je jednaka:

$$\begin{aligned} P_{KBMN} &= |KB| \cdot v_1 = |NM| \cdot v_1 \\ &= \sqrt{|NM| \cdot v_1 \cdot |AK| \cdot v_2} \\ &= 2\sqrt{\frac{|NM| \cdot v_2}{2} \cdot \frac{|AK| \cdot v_1}{2}} \\ &= 2\sqrt{P_1 \cdot P_2}. \end{aligned}$$

Vedran Rafaelić (3),
Opća gimnazija, SŠ V. Gortana, Buje

3042. *Duljine stranica trokuta su a, b i c, a nasuprotni kutovi α, β i γ. Poznato je $a = 4$, $b = 5$ i $\gamma = 2\alpha$. Izračunaj c.*

Prvo rješenje.



Neka je točka D presjek simetrale kuta $\sphericalangle BCA$ i stranice $|AB|$. Trokut ADC je jednakokračan, pa je $|AD| = |DC| = x$. Zbog činjenice da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju, imamo:

$$\frac{x}{|BD|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{5}{4},$$

$$|BD| = \frac{4}{5}x.$$

Primjenjujući Stewartov teorem na $\triangle ABC$

$$|AB|(|CD|^2 + |AD| \cdot |BD|) = |AD| \cdot |BC|^2 + |BD| \cdot |AC|^2$$

dobivamo sljedeće:

$$\frac{9}{5}x\left(x^2 + \frac{4}{5}x^2\right) = 16x + 20x,$$

$$x^2 = \frac{100}{9},$$

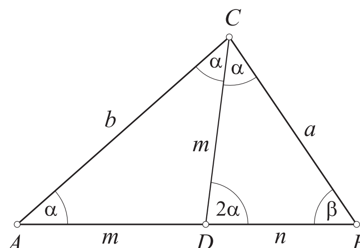
$$x = \frac{10}{3} \quad (x \text{ je pozitivan broj})$$

$$c = |AD| + |BD| = \frac{9}{5}x = 6.$$

Ivo Božić, (1),
XV. gimnazija, Zagreb

Drugo rješenje. Zadatak riješimo općenito.

Izrazimo duljinu stranice c pomoću a i b, uz uvjet $\gamma = 2\alpha$.



Iz $m : n = b : a$ slijedi

$$(m + n) : m = (b + a) : b,$$

$$c : m = (a + b) : b,$$

odavde je $m = \dfrac{bc}{a + b}$.

Zbog sličnosti trokuta ABC i CBD vrijedi $m : a = b : c$, ili $m = \dfrac{ab}{c}$. Izjednačavanjem izraza za m, dobijemo $\dfrac{bc}{a+b} = \dfrac{ab}{c}$, odakle je $c^2 = a(a + b)$, ili $c = \sqrt{a(a + b)}$.

Za $a = 4$, $b = 5$, imamo $c = 6$.

Ur.

Treće rješenje. Iz poučka o sinusima imamo

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Ako je $\gamma=2\alpha$, vrijedi:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin 2\alpha},$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{2\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$c=8\cos\alpha,\quad \text{tj.}\quad \cos\alpha=\frac{c}{8}.$$

Primjenom poučka o kosinusu

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

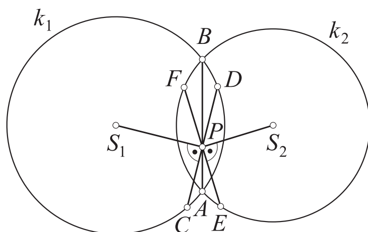
$$c^2=a^2-b^2+2bc\frac{c}{8},$$

$$c^2=36 \implies c=6.$$

Vanja Ubović (1), Virovitica

3043. *Kružnice k_1 i k_2 sa središtima S_1 i S_2 sijeku se u točkama A i B. Na spojnici $\overline{AB}$ odaberimo točku P koja nije polovište te dužine. Pravac kroz tu točku okomit na PS_1 siječe k_1 u točkama C i D. Analogno, pravac kroz P okomit na PS_2 siječe k_2 u točkama E i F. Dokaži da su točke C, D, E i F vrhovi pravokutnika.*

Rješenje. Točka P je središte dužine $\overline{CD}$, odnosno $\overline{EF}$ jer je ona nožište okomica iz središta kružnica na tetive. Radi toga se dijagonale četverokuta $CEDF$ raspolavljaju.



Potencija točke P na kružnice

$$k_1: \quad |CP|\cdot|PD|=|AP|\cdot|PB|=|CP|^2,$$

$$k_2: \quad |FP|\cdot|PE|=|AP|\cdot|PB|=|PE|^2$$

$$\implies |CP|=|PE|=|FP|=|PD|,$$

odakle slijedi da je četverokut $CEDF$ pravokutnik.

Haris Čaušević (3), Sarajevo, BiH

3044. *Ako je* $\sin\alpha+\sin\beta=a$ *i* $\cos\alpha+\cos\beta=b$, *pri čemu a i b nisu oba jednaki nuli, dokaži da je*

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Rješenje. Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta=2\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) \iff$$

$$2\sin(\alpha+\beta)+\sin 2\alpha+\sin 2\beta$$
$$=2\sin(\alpha+\beta)+2\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta),$$

$$2\sin(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\beta\cos\beta$$
$$=2\sin(\alpha+\beta)(1+\cos(\alpha-\beta))$$

$$2(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)$$
$$=\sin(\alpha+\beta)(2+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta),$$

$$\sin(\alpha+\beta)=[2(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)]\,/$$
$$\Big[\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta$$
$$+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\Big]$$
$$=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Haris Čaušević (3), Sarajevo, BiH

3045. *Kutovi trokuta su α, β i γ. Dokaži da za svaki neparan prirodan broj n vrijedi*

$$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma$$
$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 4\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}.$$

Rješenje. Redom imamo

$$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma$$
$$=2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}$$
$$+\sin n(\pi-(\alpha+\beta))$$
$$=2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}$$
$$+\sin n(\alpha+\beta)$$
$$=2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}$$
$$+2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha+n\beta}{2}$$
$$=2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}$$
$$\cdot\left(\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+\cos\frac{n\alpha+n\beta}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}$$
$$= 4\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}$$
$$= 4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}.$$

Kako je $n = 2k+1$ imamo

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \sin(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} = \sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{2}\cos k\pi = \cos k\pi$$
$$= (-1)^k = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Dakle,

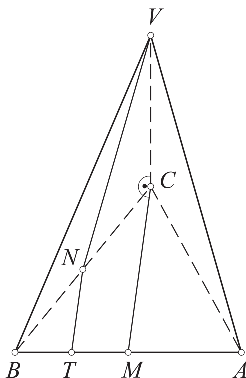
$$\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 4\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}.$$

Haris Čaušević (3), Sarajevo, BiH

3046. *Baza piramide $ABCV$ je jednakostraničan trokut ABC duljine stranice $a = 2\sqrt{2}$. Bočni brid, $\overline{VC}$ duljine 1, okomit je na ravninu baze. Nađi kut između pravaca od kojih jedan prolazi vrhom V i polovištem stranice $\overline{BC}$, a drugi vrhom C i polovištem stranice $\overline{AB}$.*

Prvo rješenje. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$. Tada je $|AM| = |MB| = \sqrt{2}$ i $|CM| = \sqrt{6}$. Neka je N polovište stranice $\overline{BC}$. Tada je $|BN| = |NC| = \sqrt{2}$. Trokut NCV je pravokutan pa je

$$|NC|^2 + |CV|^2 = |NV|^2 \implies |NV| = \sqrt{3}.$$



Neka je $MC \| NT$. Tada je $\overline{NT}$ srednjica trokuta BMC jer je N polovište od $\overline{BC}$ i $NT \| MC$. Tada je

$$|TN| = \frac{|MC|}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{i}$$
$$|BT| = |TM| = \frac{|BM|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kut između pravaca od kojih jedan prolazi vrhom V i polovištem stranice $\overline{BC}$ (VN), a drugi vrhom C i polovištem stranice $\overline{AB}$ je isti kao i kut između TN i NV. Odredimo kut između pravaca TN i NV, odnosno $\sphericalangle TNV$.

Trokut CTM je pravokutan jer je $\sphericalangle CMB = 90^\circ$, pa iz Pitagorinog poučka slijedi

$$|CT|^2 = |TM|^2 + |MC|^2,$$
$$|CT|^2 = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}, \quad \text{tj.}$$
$$|CT| = \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Trokut VCT je pravokutan jer je $\sphericalangle TCV = 90^\circ$, pa je

$$|VT|^2 = |CT|^2 + |VC|^2,$$
$$|VT|^2 = \frac{13}{2} + 1 = \frac{15}{2}, \quad \text{tj.}$$
$$|VT| = \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Trokut VNC je pravokutan jer je $\sphericalangle NCV$ pravi, pa je

$$|VN|^2 = |NC|^2 + |CV|^2,$$
$$|VN|^2 = 2 + 1 = 3,$$
$$|VN| = \sqrt{3}.$$

Primijenimo kosinusov teorem na $\triangle TNV$ i dobit ćemo $\sphericalangle TNV$. Vrijedi:

$$|TV|^2 = |TN|^2 + |VN|^2 - 2|TN|\cdot|VN|\cos\sphericalangle TNV,$$

odnosno

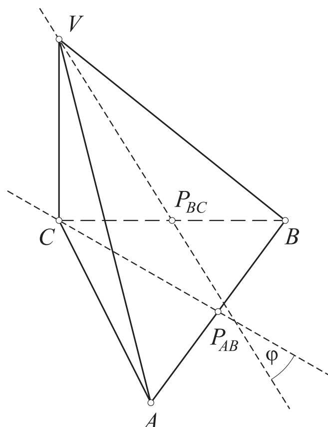
$$\cos\sphericalangle TNV = \frac{|TN|^2+|VN|^2-|TV|^2}{2|TN|\cdot|VN|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

što znači da je $\sphericalangle TNV = 135^\circ$, tj. tupi kut.

Kut između traženih pravaca je 135° ili 45°.

Mehmed Brkić (4), Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Označimo s P_{AB} i P_{BC} polovišta stranica AB i BC.



Iz slike vidimo da je $\overrightarrow{VP}_{BC} = \overrightarrow{VC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{CP}_{AB} = \overrightarrow{CB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{VC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)}{\left|\overrightarrow{VC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right|} \implies$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}|CB|^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\sqrt{|VC|^2 + \frac{1}{4}|CB|^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|CB|^2 + \frac{1}{4}|BA|^2 - 2\overrightarrow{BC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}}.$$

Budući da je $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 60^\circ = 4$, dobivamo

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}\cdot 8 - \frac{1}{4}\cdot 4}{\sqrt{1+2}\cdot\sqrt{8+2-4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pravci zatvaraju kut 45° ili 135°.

Ur.

3047. *Suma pozitivnih brojeva* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *jednaka je 1. Dokaži nejednakost*

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Prvo rješenje. Koristit ćemo Cauchy-Schwarzovu nejednakost, odnosno ako su x_1, $x_2, \ldots, x_n$ i y_1, $y_2, \ldots, y_n$ realni brojevi tada vrijedi nejednakost:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2. \qquad (*)$$

Neka je

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2}}, \quad y_1 = \sqrt{a_1+a_2},$$
$$x_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3}}, \quad y_2 = \sqrt{a_2+a_3},$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}+a_n}}, \quad y_{n-1} = \sqrt{a_{n-1}+a_n},$$
$$x_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1}}, \quad y_n = \sqrt{a_n+a_1}.$$

Tada vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_n^2}{a_n+a_1}\right) \cdot ((a_1+a_2) + \ldots + (a_{n-1}+a_n) + (a_n+a_1)) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2,$$

odnosno

$$\left(\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n+a_1}\right) \cdot 2((a_1 + \ldots + a_n)) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2.$$

Kako je prema uvjetu zadatka zbroj brojeva a_1, $a_2, \ldots, a_n$ jednak 1, iz posljednje nejednakosti slijedi

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$.

Mehmed Brkić (4), Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Iz A-G nejednakosti $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ dobivamo

$$\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2} + \frac{2a_2a_3}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{2a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n} + \frac{2a_na_1}{a_n+a_1} \leqslant a_1 + \ldots + a_n = 1 \iff$$

$$1 - \left(\frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_na_1}{a_n+a_1}\right) \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\iff \left(a_1 - \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right) + \ldots + \left(a_{n-1} - \frac{a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n}\right) + \left(a_n - \frac{a_na_1}{a_n+a_1}\right) \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Ur.

3048. *Nađi sva rješenja jednažbe*

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x.$$

Prvo rješenje. Uvedimo zamjenu $u = 2+\sqrt{3}$ i $v = 2-\sqrt{3}$. Tada je $u \cdot v = 1$. Ovom supstitucijom jednadžba prelazi u

$$u^{\frac{x}{2}} + v^{\frac{x}{2}} = 2^x \;\Big/\; ^2,$$

$$u^x + v^x + 2(uv)^{\frac{x}{2}} = 2^{2x},$$

odnosno

$$u^x + v^x - 4^x = -2.$$

Promatrajmo funkciju $f(x) = u^x + v^x - 4^x$. Dokažimo da je funkcija $f(x)$ strogo padajuća tj. dokažimo da je prva derivacija funkcije $f(x)$ negativna.

$$f(x) = u^x + v^x - 4^x,$$

$$f'(x) = u^x \ln u + v^x \ln v - 4^x \ln 4.$$

Kako je $0 < 2-\sqrt{3} = v < 1$, to je $\ln v < 0$, pa je $v^x \ln v < 0$. Kako je $u < 4$, imamo $u^x < 4^x$, pa je i $u^x \ln u < 4^x \ln 4$ i vrijedi

$$f'(x) = u^x \ln u + v^x \ln v - 4^x \ln 4 < 0.$$

Kako je funkcija $f(x) = u^x + v^x - 4^x$ padajuća i kako je neprekidna, ona je injektivna pa samo za jednu vrijednost argumenta x može uzeti vrijednost -2, tj. za $x = 2$.

Jedino rješenje dane jednadžbe je $x = 2$.

Mehmed Brkić (4), Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Zadanu jednadžbu možemo pisati ovako:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Budući je $0 < \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < 1$, postoji $\varphi \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ tako da je $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \cos\varphi$. Odavde je

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Jednadžba prelazi u

$$(\cos\varphi)^x + (\sin\varphi)^x = 1.$$

Budući je $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, to je $x = 2$ jedno rješenje zadane jednadžbe.

Pokažimo da jednadžba nema drugih rješenja. Vrijedi

$$2^x = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x \geqslant 2\sqrt[4]{[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^x} = 2,$$

to jest $2^x \geqslant 2$, odakle je $x \geqslant 1$.

Za $x \in [1, 2\rangle$:

$(\cos\varphi)^x > \cos^2\varphi,$

$(\sin\varphi)^x > \sin^2\varphi \implies (\cos\varphi)^x + (\sin\varphi)^x > 1.$

Za $x > 2$:

$(\cos\varphi)^x < \cos^2\varphi,$

$(\sin\varphi)^x < \sin^2\varphi \implies (\cos\varphi)^x + (\sin\varphi)^x < 1.$

Zbog toga je $x = 2$ jedino rješenje zadane jednadžbe.

Napomena. Iz $\cos\varphi\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1}{4} \implies 2\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{1}{2} \implies \sin 2\varphi = \dfrac{1}{2} \implies \varphi = 15^\circ$.

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 258. *Sara se želi ljuljati na drvenoj daski. Daska je dugačka 4 m, široka 40 cm i debela 5 cm. Sara ima masu 20 kg i sjedi na jednom kraju daske. Koliko treba biti potporanj udaljen od Sare da bi se ona mogla ljuljati sama? Gustoća drva od kojeg je daska napravljena je 800 kg/m³.*

Rješenje.

$a = 4$ m

$b = 40$ cm

$c = 5$ cm

$m_S = 20$ kg

$\rho = 800$ kg/ m^3

$k_S = ?$

$V_d = a \cdot b \cdot c = 0.08$ m^3,

$m_d = \rho \cdot V_d = 64$ kg.

$G_d = g \cdot m_d = 640$ N,

$G_S = g \cdot m_S = 200$ N.

Krak sile Sare može se naći iz uvjeta ravnoteže na poluzi s masom na kojoj je krak sile poluge jednak udaljenosti potpornja od težišta poluge, tj. daske:

$$G_S \cdot k_S = G_d \cdot k_d.$$

Težište se nalazi na sredini daske pa vrijedi:

$k_d = 2m - k_S$,

$200 \text{ N} \cdot k_S = 640 \text{ N} \cdot (2m - k_S)$,

$200 \text{ N} \cdot k_S = 1280 \text{ Nm} - 640 \text{ N} \cdot k_S$,

$k_S = \dfrac{1280 \text{ Nm}}{840 \text{ N}}$,

$k_S = 1.52$ m.

Maja Iljadica (7),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 259. *Ivan i Luka trče s istog mjesta u suprotnim smjerovima oko nogometnog igrališta koje je dugačko 110 metara, a široko 70 metara. Luka trči brzinom 5 m/s, a Ivan brzinom 4 m/s. Koliko metara će svaki od njih pretrčati kad se prvi put sretnu? Nakon koliko vremena će to biti?*

Prvo rješenje:

$d = 110$ m

$š = 70$ m

$v_I = 4$ m/ s

$v_L = 5$ m/ s

$t,\ s_I,\ s_L = ?$

Ukupni put s_u koji će Ivan i Luka prijeći do trenutka susreta jednak je opsegu igrališta i iznosi:

$$s_u = 2d + 2š = 360 \text{ m}.$$

Vrijeme trčanja do susreta je jednako.

$t = t_I = t_L$,

$\dfrac{s_L}{v_L} = \dfrac{s_I}{v_I}$,

$s_I = s_u - s_L$,

$\dfrac{s_L}{v_L} = \dfrac{360 - s_L}{v_I}$.

Iz prethodne jednadžbe se dobije da put koji će Luka pretrčati do trenutka susreta iznosi 200 metara.

$s_L = 200$ m,

$s_I = 360 \text{ m} - 200 \text{ m} = 160$ m,

$t = \dfrac{s_L}{v_L} = 40 \text{ s}$ ili $t = \dfrac{s_I}{t_I} = 40$ s.

Josipa Unić (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

Drugo rješenje:

$a = 110$ m

$b = 70$ m

$v_I = 4$ m/ s

$v_L = 5$ m/ s

U trenutku susreta, kako trče u suprotnim smjerovima, Ivan i Luka će zajedno prijeći cijelo igralište, tj. put koji su zajedno pretrčali jednak je opsegu igrališta koji iznosi:

$$O = 2a + 2b = 360 \text{ m}$$

Ivan i Luka u jednoj sekundi zajedno prijeđu 9 metara, što znači da im za cijelo igralište treba 40 sekundi.

Ivan u jednoj sekundi prijeđe 4 metra, što znači da će u 40 sekundi prijeći 160 metara, a Luka, koji u 1 sekundi prelazi 5 metara, će prijeći 200 metara.

Dakle, Ivanu i Luki će do susreta trebati 40 sekundi, Ivan će do tada pretrčati 160 metara, a Luka 200 metara.

Emanuel Guberović (7),
OŠ Ljudevita Gaja, Nova Gradiška

OŠ – 260. *Može li se elektroskop nabiti pozitivno pomoću negativno nabijenog štapa? Opišite kako.*

Rješenje. Kad približimo negativno naelektrizirani štap elektroskopu (a da kuglu ne dodirnemo) slobodni elektroni iz kugle, zbog odbojne sile između njih i štapa, odlaze u dio elektroskopa s kazaljkom. Kazaljka se odmiče od učvršćenog dijela jer oboje imaju višak elektrona. Tada je donji dio elektroskopa

negativno nabijen, jer ima višak elektrona, a gornji dio je pozitivan. Ako u tom trenutku dodirnemo kuglu prstom elektroni će prijeći na ruku i kazaljka će se spustiti. Kad odmaknemo negativno naelektrizirani štap kazaljka će se otkloniti. Elektroskop je naelektriziran pozitivno jer ima manjak elektrona.

Josipa Unić (8), Šibenik

OŠ – 261. *Bakrena žica debljine 1 mm je namotana na valjak promjera 40 cm. Kroz nju teče struja jakosti 2 A kad je spojena na izvor napona 9 V. Koliko ima namotaja žice na valjku? Električna otpornost bakra je* $0.017\ \Omega mm^2/m$.

Rješenje.

$$d_{\check{z}} = 2r = 1 \text{ mm}$$

$$\rho = 0.017\ \Omega\ \text{mm}^2/\text{m}$$

$$d_v = 40 \text{ cm}$$

$$I = 2 \text{ A}$$

$$\underline{U = 9 \text{ V}}$$

$$n = ?$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{9 \text{ V}}{2 \text{ A}} = 4.5\ \Omega,$$

$$s = r^2 \cdot \pi = 0.785 \text{ mm}^2,$$

$$l_{\check{z}ice} = R \cdot \frac{s}{\rho} = 207.79 \text{ m},$$

$$l_{1\ namotaja} = 2 \cdot r \cdot \pi = 125.6 \text{ cm},$$

$$n = \frac{l_{\check{z}ice}}{l_{1\ namotaja}} = 165.4 \text{ namotaja}.$$

Josipa Unić (8), Šibenik

1357. *Padobranac iskače iz aviona te nakon 3 s otvara padobran. Nakon otvaranja padobrana on naglo (trenutno) usporava te nastavlja padati brzinom od 5.4 m/s. Deset sekundi nakon njegovog iskakanja iz aviona iskače drugi padobranac. Nakon koliko vremena on mora otvoriti padobran da bi zajedno stigli do tla? Pretpostavite da je otpor zraka prije otvaranja padobrana zanemariv.*

Rješenje.

$$t_1 = 3 \text{ s}, \quad t_2 = 7\text{s}$$

$$\underline{v = 5.4 \text{ m/ s}}$$

$$t = ?$$

Prvi se padobranac u prve 3 s giba jednoliko ubrzano, a u sljedećih 7 s jednoliko i prijeđe put:

$$s = \frac{gt_1^2}{2} + vt_2 = 81.95 \text{ m}.$$

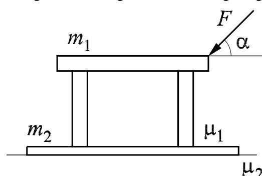
Drugi se padobranac nakon 10 s počinje gibati jednoliko ubrzano dok ne sustigne prvog koji se giba jednoliko. Ako izjednačimo njihove puteve dobivamo:

$$81.95 \text{ m} + vt = \frac{gt^2}{2}.$$

Jedino fizikalno rješenje je $t = 4.67$ s.

Vanja Ubović (1),
Gimnazija P. Preradovića, Virovitica

1358. *Stol mase* m_1 *nalazi se na malenom tepihu mase* m_2. *Koeficijent trenja između stola i tepiha je* μ_1, *a između tepiha i poda je* μ_2. *Stol se gura silom iznosa* F *pod kutom* α *prema horizontali. Koje uvjete treba zadovoljavati sila* F *da bi stol mirovao u odnosu na tepih, a tepih klizao po podu?*



Rješenje. Sila F rastavlja se na horizontalnu i vertikalnu komponentu F_H i F_V.

Ovdje sada prema trigonometrijskim relacijama vrijedi:

$$F_V = F \sin\alpha,$$

$$F_H = F \cos\alpha.$$

Da bi stol ostao mirovati na tepihu, sila trenja F_{TR1} između stola i tepiha mora biti u ravnoteži sa silom koja nastoji pomaknuti tepih horizontalno:

$$F_{TR1} = F_H.$$

Maksimalna sila trenja za koju stol miruje ovisi o težini stola i okomitoj komponenti sile $F \sin\alpha$:

$$(mg + F\sin\alpha)\mu_1 \geqslant F_{TR1} = F\cos\alpha,$$

iz čega slijedi:

$$F \leqslant \frac{mg\mu_1}{\cos\alpha - \mu_1 \sin\alpha}.$$

Da bi se tepih klizao po podu, za silu koja pomiče tepih zbog trenja izmedju stola i tepiha

$(F_{TR1} = F_H)$ i silu trenja izmedju tepiha i poda vrijedi:

$$F_H > (m_1 g + m_2 g + F \sin\alpha)\mu_2,$$

iz čega slijedi:

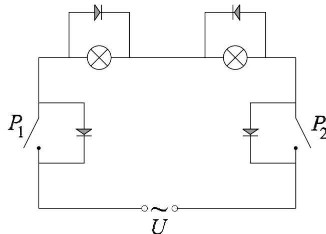
$$F > \frac{(m_1 + m_2)g\mu_2}{\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha}.$$

Sila F mora zadovoljavati sljedeći uvjet:

$$\frac{(m_1 + m_2)g\mu_2}{\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha} < F \leqslant \frac{m_1 g\mu_1}{\cos\alpha - \mu_1 \sin\alpha}.$$

Gabrijel Guberović (2), Nova Gradiška

1359. *Dvije žaruljice, četiri diode, dva prekidača (P_1 i P_2) i izvor izmjenične električne struje frekvencije 50 Hz spojeni su u električni krug kao na slici. Koja žaruljica svijetli kada je zatvoren samo prekidač P_1, odnosno samo P_2, a koja kada su zatvorena oba?*



Rješenje. Dioda propušta struju samo u jednom smjeru i tada joj je otpor zanemariv u odnosu na otpor žaruljice. U slučaju paralelnog spoja diode i žaruljice struja će prolaziti kroz diodu, a ne kroz žaruljicu. Kada je na diodi suprotni napon, njezin električni otpor je beskonačno velik i u slučaju paralelnog spoja sa žaruljicom ona će svijetliti.

Izvor izmjenične struje mijenja polaritet frekvencijom od 50 Hz pa promatramo što se dešava za oba polariteta odvojeno.

Kada je zatvoren prekidač P_1, a na lijevom kontaktu izvora je pozitivan pol, struja ne teče kroz lijevu žaruljicu već kroz diodu koja je u paralelnom spoju s njom. Dioda kod desne žaruljice tada ne propušta struju pa desna žaruljica svijetli. Ako se polaritet na izvoru promijeni, struja ne teče uopće jer je ne propuštaju otvoreni prekidač P_2 i s njim paralelno spojena dioda. Dakle, desna žaruljica će se paliti i gasiti frekvencijom od 50 Hz što će nam izgledati kao da svijetli.

Analogno zaključujemo i da će svijetliti lijeva žaruljica kad je zatvoren samo prekidač P_2 kao i da će svijetliti obje (naizmjenično frekvenijom od 50 Hz) kad su zatvorena oba prekidača.

Ur.

1360. *Strujna petlja kvadratičnog oblika duljine stranice 2 cm nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije 0.1 T. Ravnina petlje zatvara kut od 60° u odnosu na smjer magnetskog polja. Koliki moment sile djeluje na petlju ako njom teče struja jakosti 0.5 A?*

Rješenje.

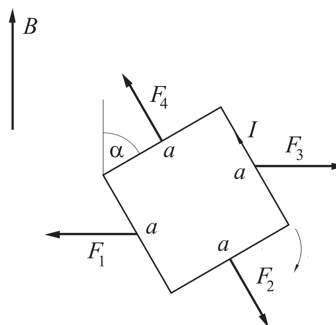
$a = 2$ cm

$B = 0.1$ T

$\alpha = 60^\circ$

$\underline{I = 0.5 \text{ A}}$

$M = ?$



Na svaku stranicu strujne petlje djeluje magnetska sila F_i koja je okomita na smjer električne struje, odnosno na stranicu kvadratne petlje i na smjer magnetskog polja. Na suprotne stranice petlje djeluju sile jednakog iznosa i suprotnog smjera. Ukupnom momentu sile doprinose samo sile F_1 i F_3. Sile na druge dvije stranice (F_2 i F_4) djeluju duž istog pravca pa je njihov ukupni moment sile jednak nuli.

Iznosi sila F_1 i F_2 su:

$$F_1 = F_2 = IBa = 1 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Ukupni iznos momenta sile koji djeluje na petlju je:

$$M = F_1 \frac{a}{2} \sin(90^\circ - \alpha) + F_2 \frac{a}{2} \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$M = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}.$$

Ur.

1361. *Kolika je najmanja kinetička energija piona (π^+) u laboratorijskom sustavu potrebna da se u reakciji $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \lambda$ stvori kaon (K^+) čiji je smjer gibanja pod kutom od 90° u odnosu na smjer gibanja piona? U laboratorijskom sustavu neutron (n) miruje. Mase čestica su $m_\pi = 140$ MeV/c^2, $m_n = 940$ MeV/c^2, $m_K = 494$ MeV/c^2 i $m_\lambda = 1115$ MeV/c^2, gdje je c brzina svjetlosti.*

Rješenje. Koristimo zakone sačuvanja energije i impulsa:

$$E_\pi + E_n = E_K + E_\lambda,$$

$$\vec{p}_\pi + \vec{p}_n = \vec{p}_K + \vec{p}_\lambda.$$

U ovakvim reakcijama potrebno je uzeti u obzir ekvivalentnost mase i energije pa za energiju i impuls čestice vrijedi:

$$E_i^2 = p_i^2 c^2 + m_i^2 c^4,$$

gdje je m_i masa čestice ($i = \pi,\ n,\ K,\ \lambda$), a c brzina svjetlosti.

Neutron miruje u laboratorijskom sustavu pa je $E_n = m_n c^2$ i $p_n = 0$.

Iz zakona sačuvanja impulsa slijedi:

$$(\vec{p}_\pi - \vec{p}_K)^2 = \vec{p}_\lambda^{\,2},$$

$$p_\pi^2 + p_K^2 - 2\vec{p}_\pi \vec{p}_K = p_\lambda^2,$$

$$p_\pi^2 + p_K^2 = p_\lambda^2, \qquad (1)$$

jer je kaon raspršen pod pravim kutom u odnosu na smjer gibanja piona.

Zakon sačuvanja energije daje:

$$(E_\pi + m_n c^2 - E_K)^2 = E_\lambda^2,$$

$$E_\pi^2 + (m_n c^2 - E_K)^2 + 2E_\pi(m_n c^2 - E_K) = p_\lambda^2 c^2 + m_\lambda^2 c^4,$$

$$p_\pi^2 c^2 + m_\pi^2 c^4 + m_n^2 c^4 + p_K^2 c^2 + m_K^2 c^4 - 2m_n c^2 E_K + 2E_\pi(m_n c^2 - E_K) = p_\lambda^2 c^2 + m_\lambda^2 c^4.$$

Uvrštavanjem (1) u gornju jednakost dobiva se energija piona:

$$E_\pi = \frac{m_\lambda^2 c^4 - m_\pi^2 c^4 - m_n^2 c^4 - m_K^2 c^4 + 2m_n c^2 E_K}{2(m_n c^2 - E_K)}.$$

Ukupna energija piona E_π je najmanja kada je i E_K najmanja, tj. kada je $E_K = m_K c^2$. Minimalna kinetička energija piona je:

$$K_\pi^{\min} = \frac{m_\lambda^2 c^4 - m_\pi^2 c^4 - m_n^2 c^4 - m_K^2 c^4 + 2m_n c^2 m_K c^2}{2(m_n c^2 - m_K c^2)} - m_\pi^2 c^4 = 1009 \text{ MeV}.$$

Ur.

1362. *Vodikov atom nalazi se u osnovnom stanju i apsorbira X-zraku valne duljine 50 nm. Nađi kinetičku energiju izbačenog elektrona u eV ako je poznato da je energija ionizacije vodikovog atoma 13.6 eV. Kolika je minimalna frekvencija X-zrake koja će ionizirati vodik u osnovnom stanju?*

Rješenje.

$\lambda = 50$ nm

$E_i = 13.6$ eV

$E_e = ?$

$\nu_{min} = ?$

Frekvencija fotona koji izbacuje elektron iz vodikovog atoma je:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 6 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1},$$

gdje je $c = 3 \cdot 10^8$ m/s brzina svjetlosti.

Njegova energija je:

$$E_f = h\nu = 3.978 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = 24.86\ \text{eV},$$

gdje je $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js Planckova konstanta.

Kinetička energija izbačenog elektrona je:

$$E_e = E_f - E_i = 11.26\ \text{eV}.$$

Minimalna frekvencija fotona je ona pri kojoj je energija fotona jednaka energiji ionizacije:

$$\nu_{\min} = \frac{E_i}{h} = 3.28 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}.$$

Ur.

1363. *Dva staklena balona volumena 200 cm^3 i 100 cm^3 spojena su kratkom cijevi koja sadrži porozan čep kao izolator, dopuštajući izjednačenje tlakova, ali ne i temperatura. Sustav se nalazi na temperaturi od 27 °C i tlaku od 100 000 Pa. Mali*

balon se stavi u posudu s ledom, a veći se izloži djelovanju pare na temperaturi od 100 °C. Koliki je konačni tlak unutar sustava? Zanemarite termičko širenje balona.

Rješenje.

$$V_1 = 100\ \mathrm{cm}^3 = 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$$
$$V_2 = 200\ \mathrm{cm}^3 = 2\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$$
$$P_0 = 10^5\ \mathrm{Pa}$$
$$t_1 = 0\,^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K}$$
$$t_2 = 100\,^\circ\mathrm{C} = 373.15\ \mathrm{K}$$
$$\underline{t_0 = 27\,^\circ\mathrm{C} = 300.15\ \mathrm{K}}$$
$$P_k = ?$$

Za stanje plina u manjem balonu isprva vrijedi:

$$P_0V_1 = n_1RT_0 \implies$$
$$n_1 = \frac{P_0V_1}{RT_0} = 4.0073\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mol},$$

pri čemu je n_1 početna množina plina u balonu.

Početno stanje plina u većem balonu je:

$$P_0V_2 = n_2RT_0 \implies$$
$$n_2 = \frac{P_0V_2}{RT_0} = 8.0146\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mol},$$

pri čemu je n_2 početna količina plina u drugom balonu.

Nakon izjednačavanja tlakova, stanje plina u baloni će biti:

$$P_kV_1 = n_3RT_1,$$
$$P_kV_2 = n_4RT_2,$$

pri čemu su n_3 i n_4 konačne množine plina u balonima za koje vrijedi:

$$n_1 + n_2 = n_3 + n_4. \qquad (1)$$

Dalje je:

$$n_3 = \frac{P_kV_1}{RT_1} = 4.4034\cdot 10^{-8}P_k,$$
$$n_4 = \frac{P_kV_2}{RT_2} = 6.4467\cdot 10^{-8}P_k.$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u (1) dobivamo:

$$P_k = 1.108\cdot 10^5\mathrm{Pa}.$$

Konačni tlak unutar balona je $1.108\cdot 10^5$ Pa.

Gabrijel Guberović (2), Nova Gradiška

Rješenja zabavne matematike

Računajte s nama

Postoji 9 zamjena: *ADEJMNPST* = 019346872, 029164738, 039287654, 039278651, 069278351, 079164238, 069287354, 139284650, 169284350.

Paralelogrami

Na crtežu je 87 paralelograma.

Djed i baka

Označimo sa x broj godina djeda Franje, a sa y broj godina bake Štefanije. Tada prvi dio uvjeta možemo pisati u obliku jednadžbe $x = 2y - x + \frac{5}{11}(2y - x)$, a drugi u obliku jednadžbe $(2x - y) + x = 207$. Rješavanjem sustava dobivamo $x = 96$, $y = 81$. Djed Franjo ima 96 godina, a baka Štefanija 81 godinu.

Slova i brojke

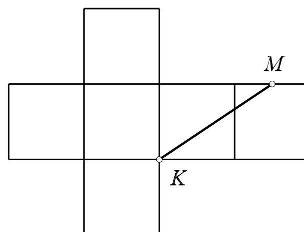
Vidite crteže!

B	O	R	
E	B	A	N
K	R	D	O
	T	E	N

9	2	3	
0	1	7	6
5	3	4	2
	8	0	6

Mravov put

Do rješenja najlakše se dolazi razvijanjem mreže kocke. Najkraći put spaja točku M s točkom K preko točke na desnom gornjem bridu koja taj brid dijeli u omjeru 1 : 2 (vidite crtež!).





10. mediteransko matematičko natjecanje – memorijal Petera O'Halorana

Ovogodišnje Mediteransko matematičko natjecanje se održavalo 21. i 22. travnja. Sudjeluje desetak mediteranskih država, kao i neke koje s njima neposredno graniče. U Hrvatskoj na ovom natjecanju su sudjelovali učenici drugog i trećeg razreda koji su godinu dana ranije na prošlogodišnjem Državnom natjecanju bili nagrađeni prvom ili drugom nagradom, te učenici četvrtog razreda koji su prošle godine osvojili prvu, drugu ili treću nagradu, te oni koji su sudjelovali ili bili u rezervi za Međunarodnu matematičku olimpijadu. Ove godine sudjelovalo je 14 učenika, koji su osvojili: jednu prvu nagradu (*Antonio Krnjak*), dvije druge (*Nikola Adžaga* i *Ana Kontrec*), četiri treće (*Melkior Ornik, Luka Žunić, Saša Stanko* i *Ivan Gavran*), tri pohvale (*Luka Rimanić, Igor Čanadi* i *Ante Tojčić*), a sudjelovalo je još četvero učenika (*Marin Mišur, Edi Ibriks, Ivan Domladovec* i *Goran Žužić*).



Natjecatelji su rješavali zadatke, u trajanju od 4.5 sata, 21. travnja na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. U nedjelju, 22. travnja proglašeni su rezultati ovog natjecanja i podijeljene nagrade najuspješnijim natjecateljima.

Ove godine na Mediteranskom matematičkom natjecanju sudjelovali su učenici iz Austrije, Bosne i Hercegovine, Grčke, Hrvatske i Španjolske.

Zadaci

1. Neka su $x \leq y \leq z$ realni brojevi, koji zadovoljavaju uvjet $xy + yz + zx = 1$. Dokaži da je $xz < \frac{1}{2}$.

Može li se ocjena uz xz smanjiti?

2. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ tetivnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki E. Poznate su duljine $|AB| = 39$, $|AE| = 45$, $|AD| = 60$ i $|BC| = 56$. Odredi duljinu $|CD|$.

3. U trokutu ABC zadani su kut $\alpha = \sphericalangle A$ i duljina stranice $a = |BC|$. Nadalje vrijedi $a = \sqrt{rR}$, gdje je r polumjer trokutu upisane i R polumjer opisane mu kružnice. Odredi sve takve trokute, tj. nađi sve duljine stranica b i c tih trokuta.

4. Broj $x > 1$ nije cijeli broj. Dokaži nejednakost

$$\left(\frac{x+\{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x+\{x\}}\right) + \left(\frac{x+[x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x+[x]}\right) \geq \frac{9}{2},$$

gdje je $[x]$ najveći cijeli broj koji nije veći od x i $\{x\}$ decimalni dio broja x.

49. državni susret i natjecanje mladih matematičara Republike Hrvatske

Matematička natjecanja za učenike srednjih godina u Hrvatskoj se provode već skoro pedeset godina, a par godina manje i za učenike osnovnih škola. U nekim školama, posebno u onima s većim brojem mladih matematičara, provode se izlučna natjecanja, koja se moraju održati krajem prvog ili na samom početku drugog polugodišta. Tzv. školska natjecanja (što odgovara prijašnjim natjecanjima u 20 općina i Gradu Zagrebu), ove godine su zakazana već za 29. siječnja, a održano je po jedinstvenim kriterijima za cijelu Republiku Hrvatsku. Zadatke za ovo natjecanje sastavlja Državno povjerenstvo za matematička natjecanja, posebno za osnovne a posebno za srednje škole.

Prošle školske godine uvedena su dva natjecanja za učenike srednjih škola, A i B varijanta. Zadaci za A varijantu su za matematičke gimnazije, koje imaju veći broj sati nastave, dok ostale škole pripadaju B varijanti. Učenik iz B varijante može se opredijeliti za A varijantu, ali to treba učiniti već na samom početku, tj. prije školskog natjecanja. Na Državno natjecanje iz B varijante ide najbolji učenik iz svakog razreda, i još desetak njih koji su postigli najbolje rezultate na županijskom natjecanju, bez obzira na pripadnost nekoj županiji. Na Državno natjecanje iz A varijante ide oko 20 učenika, a iz B varijante oko 30 učenika iz svakog razreda.

⋆ ⋆ ⋆

Nakon održanih školskih natjecanja županijska povjerenstva za matematiku pregledala su pristigla izvješća općinskih povjerenstava i učenike s najboljim rezultatima pozvala na 12. županijsko natjecanje. Ono je održano 9. ožujka, po jedinstvenim kriterijima za cijelu Republiku Hrvatsku. I zadatke za ovo natjecanje priredilo je Državno povjerenstvo.

⋆ ⋆ ⋆

Nakon održanih županijskih natjecanja, županijska povjerenstva su dostavila svoja izvješća Državnom povjerenstvu, koje ih je pregledalo i na 49. državni susret i natjecanje pozvalo 86 učenika osnovnih škola i 203 učenika srednjih škola. Pri tome, po razredima i po programima A ili B: I. razred A program – 20, B program – 30; II. razred A program – 20, B program – 31; III. razred A program – 21, B program – 30; IV. razred A program – 21, B program – 30 učenika.

⋆ ⋆ ⋆

Državni susret i natjecanje održano je u Krku od 2. do 5. svibnja 2007. godine (prije dvije godine Omišalj je bio domačin ovog, kod nas, najvećeg susreta učenika i mentora osnovnih i srednjih škola). Pokrovitelj ovog natjecanja je Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, a organizatori Agencija za odgoj o obrazovanje i Hrvatsko matematičko društvo. Otvorenje ovog susreta i natjecanja upriličeno je u športskoj dvorani Srednje škole "Hrvatski kralj Zvonimir", dok se samo natjecanje odvijalo u Osnovnoj školi "Fran Krsto Frankopan". (Prije nešto više od dvije godine ova se škola uselila u novu, vrlo modernu i funkcionalnu zgradu, u kojoj se školuje preko 1400 učenika osnovnih i srednjih škola.)

Na samom otvorenju ovogodišnjih susreta i natjecanja učenicima i mentorima obratili su se, između stalih, i ravnatelj škole-domaćina Serđo Samblić, Predsjednik državnog povjerenstva za natjecanje iz matematike, prof.dr.sc. Neven Elezović i na kraju, Vinko Filipović, ravnatelj Agencije za odgoj i obrazovanje, koji je istaknuo važnost matematike u svakodnevnom životu te pohvalio mentore za nesebičan trud i rad s nadarenim učenicima.

Najljepše zahvale idu učenicima, učiteljima i ostalim djelatnicima osnovne škole "Fran Krsto Frankopan" u Krku za sve što su učinili da sudionici ovih susreta provedu nekoliko ugodnih i nezaboravnih dana u njihovoj sredini. Kako se na Krku od davnine koristila glagoljica, tako to nije ostalo nezabilježeno ni u hotelu "Koralj" u kojem smo bili smješteni. Posljednjeg dana ovih susreta održan je okrugli stol u Glagoljaškoj dvorani.

Tijekom ovog susreta za nastavnike se održavao dvodnevni seminar na kojem je održano osam predavanja, i to:

Vinko Bajrović, Statistika i vjerojatnost,

Neven Elezović, Fermat-Torricelli-Steinerova točka,

Neven Elezović, Vjerojatnost za sladokusce,

Nives Jozić, Županijsko natjecanje iz matematike za učenike četvrtih, petih i šestih razreda,

Zdravko Kurnik, Diofantske jednadžbe,

Neda Lesar, Natjecanja iz matemaitke,

Anđelko Marić, Kvadratni niz,

Anđelko Marić, Visine i ortocentar trokuta.

Članci za seminar objavljeni su u Biltenu seminara za nastavnike-mentore br. 16.

Predzadnjeg dana, navečer je održano službeno proglašenje rezultata, na kojem je Predsjednik državnog povjerenstva uručio matematičke knjige kao nagrade. Nagrađeno je 35 učenika osnovnih i 66 učenika srednjih škola. Pohvaljeno je 23 učenika osnovnih i 40 učenika srednjih škola.

A program

I. razred *Ante Malenica*, V. gimnazija, Zagreb, *Borna Cicvarić*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (I. nagrada); *Adrian Kurdija*, V. gimnazija, Zagreb, *Zrinka Gavran*, V. gimnazija, Zagreb, *Fran Vončina*, V. gimnazija, Zagreb, *Vladimir Jerebić*, III. gimnazija, Split (II. nagrada); *Ivo Božić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Roko-Pavao Andričević*, III. gimnazija, Split (III. nagrada); *Mirko Kokot*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Anđelko Kolak*, XV. gimnazija, Zagreb, *Michael Hasanec*, Gimnazija I. Z. Dijankovečkoga, Križevci, *Hrvoje Stojanović*, V. gimnazija, Zagreb, *Marin Bužančić*, V. gimnazija, Zagreb, *Ljudevit Palle*, V. gimnazija, Zagreb (pohvala).

II. razred

Sonja Žunar, SŠ Ivanec, Ivanec, *Nina Kamčev*, XV. gimnazija, Zagreb, *Petar Mlinarić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Marko Magerl*, XV. gimnazija, Zagreb, *Mirta Dvorničić*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (I. nagrada); *Irma Telarović*, XV. gimnazija, Zagreb, (II. nagrada); *Goran Žužić*, V. gimnazija, Zagreb, *Mirta Dumančić*, III. gimnazija, Osijek, *Ivan Domladovec*, Gimnazija L. Vranjanina, Zagreb, *Ivana Puklavec*, Gimnazija Čakovec, Čakovec, *Edi Ibriks*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka, *Ana Kontrec*, V. gimnazija, Zagreb, *Martin Šošić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Ante Tojčić*, III. gimnazija, Split, *Jakša Markotić*, III. gimnazija, Split, *Filip Barl*, V. gimnazija, Zagreb, (pohvala).

III. razred

Marina Slišković, V. gimnazija, Zagreb, *Melkior Ornik*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ines Marušić*, V. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Jelena Gusić*, III. gimnazija, Split (II. nagrada); *Ivan Šandrk*, V. gimnazija, Zagreb, *Ivo Sluganović*, V. gimnazija, Zagreb, *Ana Šušnjara*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Ivan Krijan*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Juraj Klarić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Bernard Ćosić*, Gimnazija L. Vranjanina, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Antonio Krnjak, Gimnazija Čakovec, Čakovec, *Saša Stanko*, V. gimnazija, Zagreb, *Luka Rimanić*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (I. nagrada); *Nikola Adžaga*, V. gimnazija, Zagreb, *Krešimir Mišura*, V. gimnazija, Zagreb, *Igor Čanadi*, XV. gimnazija, Zagreb, *Petar Sirković*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Luka Žunić*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (III. nagrada); *Rudolf Tretler*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka, *Daria Štefić*, Gimnazija Čakovec, Čakovec, *Ervin Duraković*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka, *Lenka Vukšić*, III. gimnazija, Split (pohvala).

B program

I. razred

Luka Maričić, I. gimnazija, Zagreb, *Dorija Humski*, SŠ Jastrebarsko, Jastrebarsko (I. nagrada); *Dino Koprivnjak*, SŠ Valpovo, Valpovo, *Matija Šantl*, TIOŠ, Čakovec (II. nagrada); *Jasmina Šestan*, Pazinski kolegij – klasična gimnazija, Pazin, *Andrea Mušić*, SŠ Vela Luka, Vela Luka, *Mihael Šafarić*, TIOŠ, Čakovec, *Miro Plenković*, SŠ Hvar, Hvar, *Ivana Marinović*, SŠ Blato, Blato, *Renata Tišler*, Gimnazija Fran

Galović, Koprivnica (III. nagrada); *Tomislav Milić*, SŠ Valpovo, Valpovo, *Dean Barbić*, SŠ M. Blažine, Labin, *Marija Čelar*, Gimnazija A. Vrančića, Šibenik, *Petra Vujević*, Gimnazija Velika Gorica, Velika Gorica, *Filip Kiršek*, Gimnazija Daruvar, Daruvar, *Marta Kapetanović*, IV. gimnazija Marko Marulić, Split, *Jakov Tomljanović*, SŠ Pavla Rittera Vitezovića, Senj.

II. razred

Ivana Balažević, SŠ Dr. Antuna Barca, Crikvenica (I. nagrada); *Denis Husadžić*, Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška (II. nagrada); *Mislav Paštar*, SŠ M. Balota, Poreč, *Barbara Plavčić*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka, *Siniša Urošev*, XI. gimnazija, Zagreb, *Manuela Činko*, Gimnazija i strukovna škola J. Dobrile, Pazin, *Marija Galić*, Gimnazija A. Vrančića, Šibenik (III. nagrada); *Alen Jurišić*, SŠ Vrbovec, Vrbovec, *Ivan Biondić*, SŠ Marka Marulića, Slatina, *Mihovil Bartulović*, Gimnazija Sisak, Sisak, *Karmen Grizelj*, II. gimnazija, Zagreb (pohvala).

III. razred

Nevena Kereša, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Tomislav Pozaić*, Srednja škola, Zlatar (I. nagrada); *Vedran Rafaelić*, SŠ V. Gortana, Buje, (II. nagrada); *Krunoslav Petrunić*, Tehnička škola, Karlovac, *Mario Berljafa*, Tehnička škola, Pula, *Marta Topić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Davor Meštrović*, Elektrotehnička škola, Split (III. nagrada); *Vlatka Kos-Grabar*, Srednja škola, Zlatar, *Filip Pavetić*, SŠ Ivan Švear, Ivanić Grad, *Miroslav Braun*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Ivan Blažeković*, Gimnazija Velika Gorica, Velika Gorica, *Dejan Stjepanović*, Tehnička škola, Vinkovci.

IV. razred

Anamarija Skenderović, XI. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Mario Komljenović*, I. gimnazija, Zagreb, *Ivan Strizić*, Gimnazija Matije Mesića, Slavonski Brod, (II. nagrada); *Brankica Plećaš*, IX. gimnazija, Zagreb, *Nikolina Frid*, I. gimnazija, Zagreb, *Marka Todorović*, SŠ Brač, Brač (III. nagrada); *Zvonko Bočkaj*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *Sanja Živić*, Srednja škola Mate Balote, Poreč, *Ana Anušić*, I. gimnazija, Zagreb, *Lovro Šipovac*, SŠ M. de Dominisa, Rab, *Marko Kelava*, Srednja škola Sesvete, Sesvete, *Ivana Lukčin*, Gimnazija F. Galovića, Koprivnica, *Nenad Kralj*, Prva sušačka gimnazija, Rijeka, *Karlo Talevski*, Gimnazija Velika Gorica, Velika Gorica, (pohvala).

Zadaci s državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Nađite realna rješenja sustava jednadžbi:

$$x+y+z=2$$
$$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1$$
$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6$$

2. Na polupravcima p i q sa zajedničkim početkom O dane su točke A i C (na p) te B i D (na q). Ako je pravac CD paralelan s težišnicom trokuta OAB, dokažite da je pravac $AB2$ paralelan s težišnicom trokuta OCD.

3. **a)** Dokažite da se ploča dimenzija 4×4 može obojiti u dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih

redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.
b) Dokažite da gore navedeno svojstvo ne vrijedi za ploču dimenzija 5×5.

4. Odredite najveći prirodni broj n takav da $n^2+2007n$ bude kvadrat nekog prirodnog broja.

II. razred

1. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu
$$(x^2 - a^2)^2 - 4ax - 1 = 0,$$
gdje je a realni broj.

2. Dana je polukružnica nad promjerom $\overline{AB}$ i na njoj točke C i D tako da vrijedi:
a) točka C pripada luku $\widehat{AD}$;
b) $\sphericalangle CSD$ je pravi, pri čemu je S središte dužine $\overline{AB}$.
Neka je E sjecište pravaca AC i BD, a F sjecište AD i BC. Dokažite da je $|EF| = |AB|$.

3. Nađite sve prirodne brojeve koji su najveća zajednička mjera brojeva oblika $5n+6$ i $8n+7$ za neko $n \in \mathbf{N}$.

4. Unutar trokuta ABC nalazi se točka S. Dokažite da je umnožak udaljenosti točke S od stranica trokuta ABC najveći kada je točka S njegovo težište.

III. razred

1. Neka je n prirodan broj takav da je $n+1$ djeljiv s 24.
a) Dokažite da broj n ima paran broj djelitelja (uključujući 1 i sam broj n).
b) Dokažite da je zbroj svih djelitelja broja n djeljiv s 24.

2. U trokutu ABC s kutom $\sphericalangle BAC = 120°$ simetrale kutova $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ sijeku nasuprotne stranice u točkama D, E i F redom. Dokažite da kružnica s promjerom $\overline{EF}$ prolazi kroz D.

3. U šiljastokutnom trokutu ABC udaljenosti od vrha A do središta opisane kružnice i ortocentra su jednake. Izračunati kut $\alpha = \sphericalangle BAC$.

4. Deset brojeva 1, 4, 7,..., 28 (razlika dvaju uzastopnih je 3) raspoređeno je u krug. Sa N označimo najveću od deset suma koje dobivamo tako da svaki od brojeva zbrojimo s dva njemu susjedna broja. Koja je najmanja vrijednost broja N koju možemo postići?

IV. razred

1. Neka je n prirodan broj takav da je $n+1$ djeljiv s 24.
a) Dokažite da broj n ima paran broj djelitelja (uključujući 1 i sam broj n).
b) Dokažite da je zbroj svih djelitelja broja n djeljiv s 24.

2. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:
$$a_0 = 3$$
$$a_n = 2 + a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}, \qquad n \geqslant 1.$$
a) Dokažite da su svi članovi tog niza u parovima relativno prosti prirodni brojevi.
b) Odredite a_{2007}.

3. Zadana je tablica $5 \times n$ kojoj je svako polje obojano u crvenu ili plavu boju. Nađite najmanji n za koji se uvijek mogu odabrati tri retka i tri stupca takva da je svih 9 polja u njihovom presjeku iste boje.

4. Šiljastokutni trokut ABC kome su A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ upisan je u kružnicu sa središtem u točki O polumjera 1. Dokažite da je

$$\frac{1}{|OA_1|}+\frac{1}{|OB_1|}+\frac{1}{|OC_1|}\geqslant 6.$$

Zadaci s državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Koja relacija povezuje brojeve a, b i c ako za neke x i y vrijede jednakosti

$$a=x-y,\qquad b=x^2-y^2,\qquad c=x^3-y^3?$$

2. Zadan je pravokutan trokut $\triangle ABC$, s pravim kutom pri vrhu C. Na kateti $\overline{BC}$ odaberimo točku A_1, a na kateti $\overline{AC}$ točku B_1. Dokažite da je

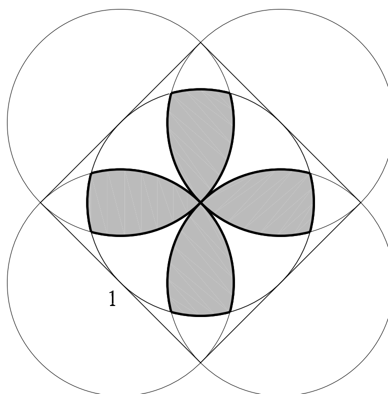
$$|AA_1|^2+|BB_1|^2=|AB|^2+|A_1B_1|^2.$$

3. Dokažite da je broj

$$\underbrace{111\ldots1}_{2n}-\underbrace{222\ldots2}_{n \text{ znamenaka}}$$

kvadrat prirodnog broja.

4. Kvadratu stranice duljine 1 upisana je kružnica, a nad njegovim stranicama kao promjerima konstruirane su četiri kružnice. Izračunajte opseg "propelera" na slici.



5. Nađite sve prirodne brojeve $m,\ n\in\mathbf{N}$ takve da vrijedi

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}=\frac{2}{5}.$$

II. razred

1. Odredite sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.

2. Ako su a, b i c duljine stranica nekog trokuta, dokažite da je funkcija

$$f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

pozitivna za svaki realni x.

3. Dan je skup parabola $y=(k-2)x^2-2kx+k+2$, pri čemu je $k\neq 2$ realni broj.
a) Dokažite da tjemena svih tih parabola leže na istom pravcu i odredite njegovu jednadžbu.
b) Imaju li sve ove parabole zajedničku točku?

4. Na dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ izabrane su redom točke M i N tako da je $MB\|AD$ i $NA\|BC$. Dokažite da je $MN\|CD$.

5. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijede nejednakosti:
a)
$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca,$$
b)
$$\frac{ab+c^2}{a+b}+\frac{bc+a^2}{b+c}+\frac{ca+b^2}{c+a}\geqslant a+b+c.$$

III. razred

1. **a)** Dokažite da vrijedi
$$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+x)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-x).$$
b) Izračunajte
$$\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ.$$

2. Ako su u konveksnom četverokutu jednaki zbrojevi kvadrata duljina suprotnih stranica, dokažite da su mu dijagonale okomite.

3. Trapezu $ABCD$ je opisana i upisana kružnica. Omjer visine trapeza i polumjera opisane kružnice je $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Odredite kutove trapeza.

4. Pravilni oktaedar je tijelo sastavljeno od dvije pravilne četverostrane piramide sa zajedničkom osnovkom i preostala dva vrha simetrična s obzirom na ravninu te osnovke, takvo da svih 12 bridova imaju jednake duljine.
Odredite omjer volumena opisane i upisane kugle pravilnom oktaedru.

5. Dokažite da za sve proste brojeve $p>3$ broj p^2+11 ima više od šest različitih prirodnih djelitelja (računajući 1 i samog sebe).

IV. razred

1. U pravokutniku $ABCD$ zadane su točka E na stranici $\overline{BC}$ i točka F na stranici $\overline{CD}$. Ako je trokut AEF jednakostraničan, dokažite da je da je
$$P_{\triangle ECF}=P_{\triangle ABE}+P_{\triangle AFD}.$$

2. Pravac kroz točku $(0,a)$, $a>0$, siječe simetrale kvadranata koordinatnog sustava u točkama A i B. Pokažite da polovište dužine AB leže na hiperboli. Odredite jednadžbu i koordinate središta te hiperbole.

3. Dokažite da je najveći koeficijent u razvoju $(a+b)^{2n}$ paran broj.

4. Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Nađite sve takve nizove.

5. Ako su a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokažite da je
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Na Državnom natjecanju određena je ekipa koja će predstavljati Republiku Hrvatsku na 48. međuarodnoj matematičkoj olimpijadi. Dan nakon održanog natjecanja ukazala se potreba za organizacijom dodatnog natjecanja za izbor dijela olimpijske ekipe, a isto tako za izbor ekipe koja će u rujnu sudjelovati na Srednjoeuroskoj matematičkoj olimpijadi. Putnici za Vijetnam su:

Nikola Adžaga,
Antonio Krnjak,
Luka Rimanić,
Petar Sirković,
Saša Stanko,
Luka Žunić.

Budući da će se Srednjoeuropska matematička olimpijada održavati u rujnu, na Državnom natjecanju izabrano je deset učenika koji će imati pripreme tokom lipnja i srpnja i tada će se na dodatnom natjecanju odrediti oni koji će predstavljati Republiku Hrvatsku u Eisenstadtu u Austriji. Potencijalni kandidati su bili:

Ivan Domaldovec,
Edi Ibriks,
Nina Kamčev,
Adrian Satja Kurdija,
Ante Malenica,
Ines Marušić,
Melkior Ornik,
Marina Slišković,
Sonja Žunar,
Goran Žužić.

Zadaci s rješenjima sa svih ovih natjecanja biti će objavljeni u knjizi Matematička natjecanja 2006./ 2007.

Član Državnog povjerenstva za matematička natjecanja,
Željko Hanjš, Zagreb

23. ljetna škola mladih fizičara Labin, 24. – 30. lipnja 2007.

Ovogodišnja ljetna škola je bila posvećena velikanu hrvatske znanosti, akademiku Andriji Mohorovičiću (1857.–1936.), meteorologu, seizmologu i geofizičaru, povodom 150. obljetnice njegova rođenja. Prigodnim predavanjem polaznicima Škole približen je Mohorovičićev bogat i nadasve originalan istraživački rad kojega je prepoznala svjetska znanstvena zajednica nazvavši njegovim imenom plohe Zemljinog i Marsovog diskontinuiteta brzina širenja potresa, krater na Mjesecu i jedan asteroid.

Zahvaljujući susretljivosti i iznimnoj angažiranosti nastavnika prirodnih predmeta, treći put za redom Ljetna škola je održana u Srednjoj školi Mate Blažine u Labinu od 24. do 30. lipnja 2007. godine. Središnja tema ovogodišnje škole bila je *ekologija*. Sadržajno, predavanjima i praktičnim vježbama bila je usmjerena na fiziku i fizikalne metode koje se koriste pri opažanju onečišćenja okoliša, modeliranju njihovog širenja i mogućih posljedica incidentnih događaja i havarija, te zaštiti od zagađenja. Predavanja su držali znanstvenici koji se aktivno bave uvođenjem, primjenom i razvojem fizikalnih metoda i modela u ekologiji, koji su na primjeren način učenicima pružili znanstveni

pogled na stanje u ekologiji, i približili postignuća ne samo domaćih nego i inozemnih istraživača u tom, za život važnom i osjetljivom području.

Predavači i teme koje su bile obrađene: Korado Korlević (Zvjezdarnica Višnjan, Višnjan), *Nove spoznaje o Sunčevu sustavu;* Mladen Juračić (PMF, Zagreb), *Klimatske promjene: prošlost i budućnost;* Mirko Orlić (PMF, Zagreb), *Razvoj fizičke oceanografije: od analize do prognoze;* Marijan Herak (PMF, Zagreb), *Andrija Mohorovičić, univerzalni geofizičar i velikan hrvatske znanosti;* Stjepan Marcelja (PMF, Split), *Promjene klime i razine mora u prošlosti i budućnosti;* Dubravko Pevec (FER, Zagreb), *Nuklearna energija i okoliš;* Mile Baće (FER, Zagreb), *Obnovljivi izvori energije: sunce i vjetar;* Ines Krajcar-Bronić (IRB, Zagreb), *Kruženje ugljika i vode u prirodi praćeno izotopima;* Zvjezdana Bencetić-Klaić (PMF, Zagreb), *Meteorologija i ekologija;* Katica Biljaković (IF, Zagreb), *Šumski požar kao kompleksni sistem*; Glenda Šorgo (IRB, Zagreb), *Kakav zrak dišemo*; Marko Jusup (IRB, Zagreb), *Utjecaj uzgajališta riba na okoliš* i Đuro Drobac (IF, Zagreb) i Ivica Prlić (IMI, Zagreb) *Elektromagnetska kupelj*.

U radu škole su sudjelovali učenici: a) **osnovne škole**: *Borna Vukadinović*, OŠ Trnsko, Zagreb; *Kristijan Kvaternik*, OŠ Vrbani, Zagreb; *Nikola Konjušak*, OŠ B. Klaića, Bizovac; *Marko Šarlija*, OŠ K. Krstića, Zadar; *Nikola Štoković*, OŠ J. Dobrile, Rovinj; b) **srednje škole**: *Josip Grgurić*, Gimnazija Karlovac, Karlovac; *Petar Kunštek, Marija Kranjčević, Denis Osvald, Fran Jurišić, Nina Kamčev, Petar Mlinarić, Juraj Klarić* i *Stjepan Brzaj*, XV. gimnazija, Zagreb; *Josip Kauf* i *Ivan Domladovec*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb; *Roko Budimir*, 1. tehnička škola Nikole Tesle, Zagreb; *Ana Kontrec*, V. gimnazija, Zagreb; *Mario Menix*, Gimnazija Metković, Metković, *Marko Čolić*, III. gimnazija, Osijek; *Ivan Peris*, gimnazija Karlovac, Karlovac, *Deni Vale*, Gimnazija Pula, Pula; *Ana Juričić*, Gimnazija dr. Mate Ujevića, Imotski; *Rudolf Treler*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka; *Denis Wertheim* i *Pavle Lacko*, Elektrostrojarska škola Varaždin; *Roberto Paliska* i *Andrea Demetilka*, Srednja škola Mate Blažine, Labin; *Iva Mugrić* i *Maja Hećimović*, Gimnazija Gospić, Gospić; c) **učenici hrvatskog porijekla iz iznozemstva**: *Miho Ilić* i *Maja Milović*, Hrvatsko građansko društvo Crne Gore, Kotor, Crna Gora; *Dragan Milovan* i *Snježana-Miljana Vorga*, Dvojezična rumunjsko-hrvatska gimnazija, Karaševo, Rumunjska; d) učenici koje su nagradile, bilo njihove škole ili roditelji sami sudjelovanjem na Ljetnoj školi: *Velimir Mihelčić* i *Ivan Poparić-Grgas*, Matematička gimnazija A. Vrančića, Šibenik; *Jerko Roško*, Zagreb, Prva gimanzija, učenik *Bruno Domladovec*, Zagreb. U pratnji učenika bili su nastavnici: *Štefica Božinović, prof.* Hrvatsko građansko društvo Crne Gore, Kotor, *Alina Mistou, prof.*, Dvojezična rumunjsko-hrvatska gimnazija Karaševo, Rumunjska, te studenti: *Danijel Pikutić* (Varaždin), PMF Zagreb i *Marko Popović* (Zagreb), PMF Zagreb kao i domaćini škole: *Čedomir Ružić*, ravnatelj i *Željko Brenčić*, profesor fizike.

Na kraju škole organizatori su proveli anketu među učenicima, u kojoj su učenici bili zamoljeni da ocijene ovogodišnju školu (predavanja, poslijepodnevne aktivnosti, izlet i slobodno vrijeme, smještaj i hranu, kao i zbornik predavanja i web stranicu škole). Iako je škola u cjelini vrlo dobro ocijenjena, sama predavanja su dobila ocjenu nižu od ocjena ostalih sadržaja, što znači da se ubuduće treba posvetiti velika pažnja izboru tema, predavača, naročito nivou i načinu izlaganja jer je to najsadržajniji element ljetne škole.

Ur.



NOVOSTI IZ ZNANOSTI

LHC započinje s radom u svibnju 2008.

Igor Smiljanić[1], *Zagreb*

CERN je objavio da će Veliki hadronski sudarač (LHC) početi s radom u svibnju 2008. godine, a sudari pri punoj energiji će početi u ljeto 2008. godine.

CERN je kratica za **Europsku organizaciju za nuklearna istraživanja** (eng. *European Organization for Nuclear Research*, fr. *Organisation européenne pour la recherche nucléaire*) i najveći je svjetski laboratorij za fiziku čestica. Nalazi se sjeverozapadno od Ženeve na granici Švicarske i Francuske, a osnovan je 1954. godine kao Europsko vijeće za nuklearna istraživanja (fr. ***C**onseil **E**uropéen pour la **R**echerche **N**ucléaire*). S početnih 12 zemalja članica, danas ima 20 zemalja članica (Hrvatska nije član) i glavna funkcija mu je omogućiti eksperimentalna i teorijska istraživanja na području fizike visokih energija i fizike elementarnih čestica. Ima oko 2600 zaposlenika, a oko 8000 znanstvenika i inženjera s 500 sveučilišta iz 80 zemalja radi na raznim eksperimentima koji se provode na nekoliko ubrzivača čestica unutar CERN-a. Zanimljivost je kako je www (World Wide Web) počeo na CERN-u kao projekt ENQUIRE 1990. godine, a prva web stranica je došla on-line 1991. godine.

Veliki hadronski sudarač (eng. ***L**arge **H**adron **C**ollider*, *LHC*) će biti najveći svjetski ubrzivač i sudarač čestica, a njegova izgradnja je započela u CERN-u 2001. godine. Hadroni su složene čestice koje se sastoje od elementarnijih čestica kvarkova. Dijele se u dvije grupe: barione (koji se satoje od tri kvarka) i mezone (koji se sastoje od kvarka i antikvarka). Poznati primjeri bariona su proton i neutron koji čine jezgre atoma. LHC će ubrzavati i sudarati dvije zrake protona stopom od milijardu sudara po sekundi, a protoni u svakoj zraci će imati energiju 7 TeV (teraelektronvolti, $1\ \mathrm{TeV} = 10^{12}\ \mathrm{eV}$, $1\ \mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$) što će davati energiju sudara od 14 TeV (vježba: izračunajte pripadnu brzinu protona). LHC se nalazi unutar podzemnog kružnog tunela dužine 27 kilometara koji služi za ubrzavanje čestica, a sastoji se od dvije cijevi koje sadrže zrake protona. Unutar svake cijevi protoni putuju u suprotnom smjeru, a ubrzavaju se snažnim supravodljivim magnetima hlađenim tekućim helijem temperature 4.2 K $(-269\,^{\circ}\mathrm{C})$. Zrake se dodatnim magnetima križaju na četiri mjesta gdje dolazi do sudara pri čemu se oslobađa ogromna količina energije od koje nastaju mnoge druge elementarne i složene čestice. Pomoću posebnih detektora fizičari će proučavati novonastale čestice i njihova međudjelovanja kako bi testirali postojeće fizikalne teorije, a vjerojatno otkrili i nove. Treba reći kako je LHC nasljednik LEP-a (eng. ***L**arge **E**lectron-**P**ositron Collider*), ranijeg ubrzivača i sudarača čestica koji je radio od 1989. do 2000. godine, a koristio je isti tunel. Osim korištenja protona umjesto elektrona i pozitrona, glavna razlika LHC-a u odnosu na LEP je ugradnja jačih supravodljivih magneta umjesto običnih magneta te ugradnja šest potpuno novih i naprednijih detektora čestica (najveći od njih, ATLAS, bit će promjera 25 metara, dužine 46 metara i težine 7000 tona). Detektori će proizvoditi računalne podatke brzinom od skoro 2 GB po sekundi! Ukupna cijena izgradnje LHC-a će iznositi 6.3 milijarde eura!

Koju fiziku će proučavati LHC? S energijom od 14 TeV i stopom sudara od milijardu po sekundi LHC će istraživati unutarnju strukturu tvari na skali koja je red veličine (10 puta) manja od dosada istraživanih. Eksperimentalni rezultati na

[1] Autor je znanstveni novak na Institutu za fiziku u Zagrebu (ismiljanic@ifs.hr).

dosadašnjim udaljenostima i energijama su doveli do teorijskog opisa tvari (materije) koji je poznat kao Standardni model, a uključuje (ujedinjuje) tri od četiri međudjelovanja (sile) u fizici: elektromagnetsko, jako nuklearno i slabo nuklearno (bez gravitacije). Ipak, opis pomoću Standardnog modela je nepotpun te ostavlja neodgovorenim mnoga fundamentalna (temeljna) pitanja kao npr. zašto neke čestice imaju masu, a druge nemaju, zašto postoje male razlike u svojstvima materije i antimaterije te mogu li se sva četiri međudjelovanja ujediniti. Standardni model također ne daje odgovor na neka važna kozmološka pitanja kao što je priroda tamne tvari i tamne energije. Glavno predviđanje Standardnog modela i njegov glavni sastojak je postojanje tzv. **Higgsove čestice**. Higgsova čestica dosada nije opažena, a nužna je za objašnjenje mase ostalih čestica (kvarkova, elektrona i dr.) U stvarnom svijetu samo dvije čestice nemaju masu: foton (prijenosnik elektromagnetskog međudjelovanja) i gluon (prijenosnik jakog nuklearnog međudjelovanja). Većina fizičara smatra kako Higgsova čestica ima takvu masu da bi je LHC trebao otkriti. Ako se to dogodi, bit će to velika potvrda Standardnog modela, a ako se ne dogodi bit će to znak postojanja fizike izvan Standardnog modela, što bi moglo pokrenuti pravu revoluciju u fizici čestica. Već sada postoje mnoge teorije koje idu izvan Standardnog modela, a LHC bi mogao reći štošta o ispravnostima tih teorija. Jedna od njih je suprasimetrija koja postulira da za svaku česticu postoji još jedna čestica, tzv. suprasimetrični partner, i to tako da fermioni (čestice polucjelobrojnog spina[2]) imaju partnere bozone (čestice cjelobrojnog spina) i obrnuto. Na taj način bi fermioni elektron, neutrino i kvark imali bozonske suprasimetrične partnere koji se zovu selektron, sneutrino i skvark. S druge strane, bozoni gluon i foton bi imali fermionske suprasimetrične partnere koji se zovu gluino i fotino. Mase suprasimetričnih čestica bi mogle biti na granici onog što će biti moguće opaziti LHC-om i većina tih čestica bi trebala biti nestabilna, tj. raspadati se u druge lakše čestice. U mnogim teorijskim modelima najlakša suprasimetrična čestica je idealan kandidat za tamnu tvar u Svemiru. Druge teorije koje izlaze izvan Standardnog modela predviđaju postojanje dodatnih dimenzija. Očito, naš prostor je trodimenzionalan, ali dodatne dimenzije bi mogle biti uvijene na tako malim udaljenostima da dosada nisu mogle biti opažene. Dodatne dimenzije dobivaju potporu i u teoriji struna (eng. string) koje zapravo zahtijevaju njihovo postojanje. Prema nekim varijantama teorije struna gravitacija je vrlo jaka uz male dodatne dimenzije i LHC bi stoga mogao proizvesti mikroskopske crne rupe. Te crne rupe bi, međutim, vrlo brzo isparile posredstvom Hawkingovog zračenja. LHC bi također mogao objasniti ili barem dati naznake objašnjenja zašto u Svemiru materija dominira nad antimaterijom, pitanje koje Standardni model isto ne može u potpunosti razriješiti.

Prve konkretne rezultate vrlo komplicirane analize podataka dobivenih radom LHC-a možemo očekivati oko 2010. godine. Najvažniji rezultat bi bio otkriće Higgsove čestice, tj. postoji li ona i, ako postoji, kolika je njezina masa. No, LHC bi mogao dati i dokaze postojanja suprasimetričnih čestica i dodatnih dimenzija, a također bi mogao dati indicije zašto materija dominira nad antimaterijom te koja je priroda tamne tvari. LHC ima potencijal revolucionizirati fiziku čestica i za nekoliko godina bismo trebali znati kojim smjerom će ta revolucija ići. U svakom slučaju, LHC i uređaji koji će ga naslijediti predstavljaju pravi izazov za nove generacije fizičara i matematičara!

Literatura

[1] *Physics World Headline News*, 22. lipanj 2007.; `http://physicsworld.com/cws/article/news/30339`

[2] JOHN ELLIS, *Nature* **448** (2007), 297; `http://www.nature.com/nature/journal/v448/n7151/full/nature06079.html`

[3] *Wikipedia, engleska verzija*; http:/ / en.wikipedia.org

[2] Spin je vlastiti kutni moment čestica i jedan je od njihovih temeljnih obilježja (kao masa ili naboj).

IN MEMORIAM

Ivan Supek
(1915. – 2007.)



S vremena na vrijeme pojavljuju se osobe koje svojim djelovanjem i postupcima ostavljaju snažan trag, a njihova se djela dugo pamte. To se događa kako u manjim sredinama – obiteljima, školama, ustanovama..., tako i u onim većim – gradovima, sveučilištima, velikim tvrtkama.... Postignuća nekih osoba još su veća, pa se za njih zna i dugo ih se pamti u njihovim domovinama ili čak i u cijelom svijetu. Autor ovog članka imao je sreću i čast biti učenikom i suradnikom našeg nedavno preminulog profesora i akademika Ivana Supeka koji je svojim djelima znatno doprinio napretku našeg društva. On je posebno zaslužan hrvatski znanstvenik, kulturni i društveni djelatnik, a svjetski je poznat po svom znanstvenom radu, utemeljenju i vođenju znanstvenih institucija i djelatnosti u području prirodnih znanosti u Hrvatskoj, razvoju filozofije i povijesti znanosti, po svojim književnim djelima, te kao istaknuti svjetski borac za mir i ljudska prava. Svojim je djelovanjem i postignućima uvelike unaprijedio našu zemlju i njen ugled u svijetu.

Rodio se 8. travnja 1915. u Zagrebu od oca Rudolfa i majke Marije, rođene Šips, a umro je 3. ožujka 2007. godine. U Zagrebu je polazio pučku školu i realnu gimnaziju, gdje je maturirao 1934. godine. Tijekom školovanja učio je svirati klavir, gotovo cijeli život bavio se športom, a u višim razredima gimnazije piše svoje prvo literarno djelo, dramu "Bankrot Ivana Kreugera". Ta drama nosi značajke njegove kasnije proze i drugih literarnih djela koja su velikim dijelom kritike društvenih zbivanja, opasnosti od velikih razlika između bogatih i siromašnih, borba za socijalnu pravdu, ukazivanje na opasnost propasti civilizacije u nuklearnom ratu... Niz njegovih djela posvećen je i povijesnim osobama značajnim za našu sredinu – Markantunu De Dominisu, Janusu Pannoniusu, Ivanu Vitezu, itd.

Ivan Supek odrastao je u teško doba između dva svjetska rata, u razdoblju političkih i društvenih kriza, poglavito svjetske krize 1929.–1933. godine, koje su snažno potakle razvoj niza pokreta za borbu protiv ondašnjeg ranog kapitalističkog društvenog sustava u industrijski razvijenim zemljama. Postojale su velike razlike u mogućnostima relativno malog broja bogatih, koji su živjeli rastrošno i bili bezobzirni prema golemoj većini građana koja je živjela na rubu opstojnosti, tražeći put kako preživjeti od danas do sutra. Velik utjecaj na razvoj tih pokreta imao je Sovjetski Savez, o kojemu se tada malo znalo a više maštalo kao o sretnom i uspješnom državnom sustavu. Iako iz građanskog društvenog sloja (njegovi su roditelji i djedovi bili obrtnici), priklonio se pokretu koji je tada promicao socijalnu pravdu i koji je bio zabranjen. I. Supek je do kraja svog života ostao uvjeren u važnost socijalne pravde i humanosti, pa je glede toga bio vrlo kritičan i prema kasnijoj Titovoj Jugoslaviji. Tako je i zaslužio nadimak "heretik na ljevici".

Sredinom '30-ih godina prošlog stoljeća postaje razvidno odbijanje službene sovjetske znanstvene politike da prihvati pojedina znanstvena dostignuća, poglavito ona iz kvantne fizike, koja su ostvarili znanstvenici na Zapadu. Njihov je sustav bio zasnovan na

materijalističkoj slici svijeta, pa nisu prihvaćali Einsteinovo otkriće ekvivalentnosti mase i energije s jedne strane i otkriće de Broglievih i Schroedingerovih materijalnih valova s druge (a bilo je i drugih razmimoilaženja). Tako se na "ljevici", pa i onoj našoj, razvio sukob između dviju struja, one koja je prihvaćala postavke sovjetske znanstvene politike i one koja je prihvaćala ta nova dostignuća. To je bio jedan od razloga zašto se Ivan Supek odlučio studirati prirodne znanosti i filozofiju. U Zürichu upisuje studij matematike, filozofije, fizike i biologije, a nastavlja studij u Leipzigu, tada poznatom svjetskom istraživačkom središtu u kojem su djelovali Heisenberg, Debye, Hund, Van der Waerden, Euler, Von Weizsaecker i niz drugih poznatih fizičara. Heisenberg je mladom doktorandu, I. Supeku, dao zadatak da pokuša teorijski objasniti pojavu supravodljivosti, koja je ranije otkrivena pri niskim temperaturama. To su u to vrijeme bezuspješno pokušavali riješiti mnogi teoretičari. Ni Supek nije uspio riješiti taj problem, no izveo je diferencijalnu jednadžbu za normalnu električnu vodljivost. Supekovo objašnjenje stanovite karakteristike fotoluminiscencije Heisenberg nažalost nije prihvatio, premda će upravo isticanje dominantne uloge fononske interakcije mnogo kasnije i neovisno pomoći drugim fizičarima da konačno objasne supravodljivost. Nakon doktorata, Heisenberg ga je pozvao da radi kao njegov asistent u području kvantne elektrodinamike, ali je taj rad prekinut u ožujku 1941. godine kada ga uhićuje Gestapo. Iz višemjesečnog zatvora uspijeva ga izvući Heisenberg kao svojeg asistenta, no Ivan Supek se ne vraća u Leipzig, nego odlazi u okupirani Zagreb.

Kao dosljedan antifašist odlazi u kolovozu 1943. godine na oslobođen teritorij, gdje ponajviše radi u Prosvjetnom odjelu ZAVNOH-a. U predsjedništvu je Kongresa kulturnih radnika Hrvatske u Topuskom u lipnju 1944. i drži (jedini) govor o znanosti, u kojem ističe važnost znanstvene revolucije za izgradnju zemlje i upućuje prvi javni apel protiv moguće upotrebe nuklearnog oružja, te poziva na stvaranje svjetske zajednice slobodnih i razoružanih naroda. Međutim, demokratska načela ZAVNOH-a i kulturne vizije Kongresa nisu se poštivali, nego se potkraj rata i poslije provodi stroga boljševizacija Jugoslavije, a Ivan Supek je gurnut u šutnju glede svoje opozicije dogmatizmu. Zbog svojih istupa i knjiga to se ponavljalo i tijekom cijelog njegovog kasnijeg djelovanja.

Supek je bio neumoran borac za svjetski mir i ljudska prava. Sukladno svom govoru u Topuskom 1944. godine, kada je javno upozorio na opasnost od totalnog razaranja civilizacije nuklearnim oružjem, napisao je mnoge članke i držao više javnih predavanja zastupajući mir, slobodu i jednakost među narodima. Sudjeluje u Pugwashkom pokretu za mir u svijetu, a od konferencije u Cambridgeu 1962. godine bio je i član njegovog Continuing Committee-a dugi niz godina. Godine 1962. osniva taj pokret u Hrvatskoj, prvi je njegov predsjednik, a 1963. godine domaćin je Pugwashke konferencije u Dubrovniku. Sudjelovao je na mnogim svjetskim konferencijama pokreta za mir i ljudska prava, sudjelovao u pisanju deklaracija i apela za mir i razoružanje te je i sam često pisao članke na tu temu.

Godine 1946. I. Supek je izabran za izvanrednog profesora Prirodoslovno-matematičkog fakulteta (PMF) koji je te godine osnovan odvajanjem Prirodoslovno-matematičkog odsjeka iz tadašnjeg Filozofskog fakulteta. Svoj je radni vijek nastavio na PMF-u do umirovljenja, a potom i kao profesor emeritus. Na samom početku svog rada na PMF-u, Supek osniva Seminar teoretske fizike koji je postao okosnica razvoja te važne grane znanosti u nas. U tom Seminaru okuplja mlade suradnike kojima daje istraživačke teme na svjetskoj fronti istraživanja u fizici. Početna grupa suradnika i teme koje im je zadao bili su: Vladimir Glaser – kvantna elektrodinamika, Borivoj Jakšić – mezonska teorija, Gaja Alaga – beta raspad i Ivan Babić-Gjalski – klasična elektrodinamika. Sjajna generacija fizičara koja je potom odgojila čitav niz novih znanstvenika – teorijskih fizičara, koji su svojim kasnijim djelovanjem na PMF-u, u Institutu "Ruđer Bošković" i u drugim znanstvenim institucijama odgajali nove naraštaje. Danas u Zagrebu i drugim središtima djeluje više od 60 svjetski poznatih teorijskih fizičara koje su odgojili Ivan Supek i njegovi učenici.

Ivan Supek je 1945. godine sa skupinom profesora Sveučilišta u Zagrebu osnovao časopis "Glasnik matematički, fizički i astronomski" koji je izlazio do 1965. kada ga preuzimaju matematičari i on tada postaje "Glasnik matematički". Na prijedlog inicijativnog odbora, kojega su predvodili Ivan Supek i Mladen Paić, te je godine donesena odluka za osnivanje novog, saveznog časopisa, "Fizika", koji (zbog dugotrajnih dogovora svih društava fizičara u Jugoslaviji) započinje izlaziti tek 1969. godine. Supek je dugi niz godina bio član Uredničkog savjeta tog časopisa.

U razdoblju iza II. svjetskog rata, pod jakim dojmom postignuća u području nuklearne energije, posebice nuklearnog oružja, u mnogim zemljama čine se veliki napori glede razvoja prirodnih znanosti, poglavito nuklearne fizike. Tako se i u Jugoslaviji 1947. godine osniva institut u Vinči, kasnije nazvan Institut "Boris Kidrič" (IBK), pogon za dobivaje uranove rudače u Kalni i Institut za nuklearne sirovine u Beogradu, a 1949. institut u Ljubljani, kasnije nazvan Inštitut "Jožef Stefan" (IJS). Savezna vlada donosi u lipnju 1950. odluku da se Ivanu Supeku povjeri gradnja instituta u Zagrebu, koji je kasnije nazvan Institut "Ruđer Bošković" (IRB). Iako prvotno zamišljen kao institut za teorijsku fiziku, zatim kao institut za atomsku fiziku (to je bilo prvo službeno ime instituta), Supek je otpočetka zamislio IRB kao prirodoslovno-znanstveni institut. Proširuju se područja istraživanja na fiziku visokih energija, čvrstog stanja i plazme, elektroniku, niz grana kemije, biologije i kasnije na medicinu. U svim granama zapošljava se velik broj mladih, vrsnih istraživača. Kad se osvrnem na ta vremena, upravo je bio nevjerojatan početni napredak IRB-a i glede prostora, i glede broja suradnika. Tijekom prvih šest godina u IRB-u je sagrađeno više prostora za istraživački rad, radionica i pomoćnih zgrada nego sve vrijeme kasnije, a dosegnut je i broj znanstvenih radnika gotovo jednak današnjem. Već je 1951., i sljedećih godina, veći broj suradnika IRB-a odlazi na specijalizaciju u inozemstvo kako bi upoznali moderne metode istraživanja i prenijeli ih u IRB. Tako se u svim područjima razvija široka lepeza istraživačkih tema koje čine IRB poznatim u cijelom svijetu i danas je naša najveća i u svijetu najpoznatija prirodoznanstvena ustanova. Prvih pet godina bio je u okviru Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. U tom je vremenu izbio spor oko njegovog vođenja između Uprave Akademije i uprave pod vodstvom I. Supeka. Spor je bio ponajviše oko sredstava koja je za IRB namjenski davala Savezna vlada. Uprava Akademije bi zaprimila sredstva i upravljala trošenjem tog novca. I. Supek i M. Paić, koji su od ranije bili članovi Akademije, ishodili su da se novac dobiven za gradnju instituta šalje izravno na račun IRB-a. U tom sukobu su Supek i Paić izbačeni iz Akademije, da bi nakon oko pet godina, kada je IRB bio već znatno razvijen i poznat u svijetu, bili primljeni natrag u Akademiju.

Bio sam svjedok tog ranog, a i kasnijeg razvoja IRB-a. Diplomirao sam u lipnju 1951. godine pod vodstvom I. Supeka i ujesen te godine izabran za njegovog asistenta u Zavodu za teoretsku fiziku PMF-a. Tako sam bio i član Seminara iz teoretske fizike. Odmah ujesen 1951. I. Supek mi je predložio da prijeđem na eksperimentalnu nuklearnu fiziku jer je bila donesena odluka o gradnji ciklotrona u IRB-u i bilo je potrebno usvojiti metode istraživanja s ciklotronskim snopom i radioizotopima. Već sredinom listopada 1951. otišao sam u Birmingham u Englesku gdje sam doktorirao i vratio se ujesen 1954. godine u Zagreb. Kao vanjski suradnik preuzeo sam vođenje Nuklearno-strukturne grupe, i kasnije bio pročelnik Odjela nuklearne fizike II (kao suradnik IRB-a), te Odjela za nuklearna i atomska istraživanja. U tim svojstvima bio sam član Naučnog vijeća IRB-a, Savjeta IRB-a i niza drugih tijela u IRB-u, i izravno svjedočio tom naglom i vrlo uspješnom napretku.

I. Supek je 1956., u suradnji s gotovo svim istaknutijim znanstvenicima na IRB-u i nizom znanstvenika na Sveučilištu, pokrenuo prvi poslijediplomski studij prirodnih znanosti u nas. To je otpočetka bio vrlo dobro ustrojen studij s polaznicima iz svih dijelova Jugoslavije, predavanja su se redovito održavala, a u najvećoj mjeri polaznici su obavljali istraživanja za magistarske radove u laboratorijima ili teorijskim grupama u

IRB-u. Tako je ovaj institut postao rasadnikom novih znanstvenika u cijeloj Jugoslaviji. Već nakon godinu dana od pokretanja poslijediplomskog studija prirodnih znanosti dogovoreno je zajedničko vođenje tog studija s PMF-om. Godine 1971. u okviru Sveučilišta osniva se Sveučilišni poslijediplomski studij iz raznih znanstvenih područja, koji uključuje i poslijediplomski studij prirodnih znanosti. To je spajanje različitih područja imalo važan utjecaj jer su standardi poslijediplomskog studija prirodnih znanosti prenijeti i na druga znanstvena područja.

Godine 1955. osnovana je Savezna komisija za nuklearnu energiju (SKNE), koja pod nadzor uzima sva atomska istraživanja pa tako i ona na IRB-u. I. Supek je bio član SKNE-a od samog osnivanja, kao i direktori svih drugih atomskih instituta u Jugoslaviji, pored nekoliko drugih članova. Predsjednik SKNE-a bio je Aleksandar Ranković, bliski suradnik Josipa Broza Tita. Koliko sam upućen, tako visoka predstavljenost u SKNE-u bila je, čini se, s namjerom razvoja nuklearnog oružja u tadašnjoj Jugoslaviji. U Institutu "Boris Kidrič" (IBK) odlučili su kupiti nuklearni reaktor u Sovjetskom Savezu, a toj se narudžbi suprotstavio Supek, dosljedno svojim nastojanjima za postizanje mira u svijetu, sluteći da se i kod nas priprema rat baziran na atomskom oružju. Nuklearni reaktor je kupljen, i za vrijeme njegove gradnje fizičari su u Vinči eksperimentirali s obogaćenim uranom. Zbog neopreza dogodio se incident u kojem su bila jako ozračena šestorica istraživača, jedan od njih je ubrzo umro, a ostali su se prilično dobro oporavili nakon liječenja u Francuskoj. No, incident u IBK-u bio je povod za smjenu upravitelja triju instituta, od kojih dva nisu ni na kakav način bila uključena u radnje koje su dovele do samog incidenta. Smijenjeni direktor IBK-a, P. Savić, nastavlja rad u tom institutu, direktor IJS-a, A. Peterlin, uskoro zatim odlazi u inozemstvo kao sveučilišni profesor, a I. Supek prestaje djelovati u IRB-u 1958. godine.

Potom se i Supek, uz svoj redoviti rad na PMF-u, sve više okreće svojim omiljenim temama – filozofiji i povijesti znanosti i literarnom radu. Godine 1961. osniva na PMF-u Zavod za historiju nauka i granične filozofske probleme (današnji Zavod za filozofiju i povijest znanosti) čiji je predstojnik bio do umirovljenja 1983. godine. Pored redovite dodiplomske nastave, u tom se Zavodu provodi i poslijediplomski studij iz povijesti i filozofije znanosti. Početkom '60-ih godina I. Supek osniva u Akademiji Institut za filozofiju znanosti i mir, kojem je otada bio na čelu, a novi je Institut također bio administrativno središte Jugoslavenske Pagwashke konferencije, kojoj je Supek bio predsjednik od osnutka. U tom okruženju 1966. godine počinje izlaziti tromjesečnik "Encyclopaedia moderna". Supek učestalo objavljuje članke o filozofiji humanizma, a svojom uređivačkom politikom zastupa politički pluralizam, pa je tako "Encyclopaedia moderna" počela znatno utjecati na inteligenciju, osobito onu koja je tada "okretala leđa" marksizmu i tražila nova misaona obzorja. Početkom 1992. godine Institut za filozofiju znanosti i mir spojio se sa Zavodom za povijest prirodnih, matematičkih i medicinskih znanosti u Zavod za povijest i filozofiju znanosti u kojemu su tri odsjeka: Odsjek za povijest prirodnih i matematičkih znanosti, Odsjek za povijest medicinskih znanosti i Odsjek za filozofiju znanosti. Potonji je Odsjek I. Supek vodio sve do svoje smrti.

Ivan Supek bio je rektor Sveučilišta u Zagrebu 1968.–1972. godine, u burnim vremenima studentskih nemira u svijetu, a uskoro potom i kod nas, te "Hrvatskog proljeća" i njegovog gušenja. Usprkos stalnim političkim pritiscima, uspio je provesti nekoliko uspješnih reformi Sveučilišta. Značajno je istaknuti i njegovu ideju glede osnivanja Interuniverzitetskog centra u Jugoslaviji koji bi pomogao njenom "otvaranju" i možebitnoj demokratizaciji. S tom idejom Ivan Supek je na Sveuniverzitetskom sastanku u Montrealu predložio 1970. godine osnivanje Interuniverzitetskog centra u Dubrovniku (IUC), što je prihvaćeno, a koji je ubrzo prerastao u važnu međunarodnu ustanovu s oko 200 sveučilišta-članica. Bio je to značajan prilog budućem svjetskom sporazumu kao i razvoju koncepta onog što se danas zove društvo zasnovano na znanju.

Ivana Supeka sam doživljavao kao dobru i blagu osobu, no snažnih i odlučnih stremljenja glede napretka našeg društva i cijelog svijeta. O tome svjedoči i njegov

posljednji članak u kojemu izlaže svoja stanovišta o novom razvoju odnosa u svijetu ("Globalizacija ili združeni svijet", Rad HAZU 495) u kojemu izražava velike sumnje u nova događanja u svijetu. Imao je dubok osjećaj za pravdu i jednakost, bio je dalekovidan u nalaženju načina za unapređenje društva, i izvanredno uspješan u organiziranju znanstvenog rada i sveučilišne nastave. No, nadasve je bio vrlo pošten i predan u svom radu – vrlinama koje se nedovoljno cijene u ovim našim vremenima.

Navodim pregledno neka od postignuća I. Supeka u području znanosti:

- bio je vrstan nastavnik PMF-a iz teorijske fizike te filozofije i povijesti znanosti;
- napisao je dvije popularne knjige, Svijet atoma (1941.) i Od antičke filozofije do moderne nauke o atomima (1946.) koje su imale velik utjecaj na mlade naraštaje da se opredijele za prirodoslovlje;
- osnovao je Seminar teoretske fizike na PMF-u i odgojio niz poznatih fizičara;
- osnovao je Institut "Ruđer Bošković" i vodio ga ključnih prvih 7-8 godina;
- bio je svjetski poznat borac za razoružanje i mir u svijetu;
- osnovao je Interuniverzitetski centar u Dubrovniku;
- objavio je više od dvadeset originalnih znanstvenih radova iz fizike;
- objavio je oko trideset originalnih radova iz filozofije znanosti i oko dvadeset radova o važnosti znanosti za mir u svijetu;
- objavio je šest knjiga-udžbenika iz fizike, filozofije i povijesti znanosti;
- pokrenuo je poslijediplomski studij iz prirodnih znanosti u nas;
- pokrenuo je poslijediplomski studij iz povijesti i filozofije znanosti u nas;
- suosnivač je časopisa "Glasnik matematički, fizički i astronomski", "Fizika" (u oba je bio član Uredničkog odbora) i "Encyclopaedia moderna" (bio je urednik dulje vrijeme).

U svojim nastojanjima za bolji život na svijetu istaknuo se svojim javnim nastupima u kojima se zalagao za razoružanje i mir, te jednakopravnost i napredak svih naroda svijeta. Navodim najznačajnije:

- njegov govor u Topuskom u lipnju 1944. koji je po svemu što znamo bio prvi apel u svijetu glede zabrane nuklearnog oružja;
- njegovo sudjelovanje u Pugwashkom pokretu od 1962., tj. gotovo od samog njegovog osnutka;
- članstvo u "Continuing Committee-u" Pugwashog pokreta dugi niz godina;
- osnivanje Pugwashkog pokreta u Hrvatskoj 1962. godine kojem predsjedava dugi niz godina.
- mnogi objavljeni mu članci u kojima se zalagao za svoja stanovišta.

Supek je bio i plodan pisac. Objavio je 12 romana te 8 drama, tragedija i komedija.

Dobio je mnoga priznanja od kojih treba istaći:

- izabran je za dopisnog člana JAZU 1947. godine, a redovnog člana 1961.;
- dobitnik je prve Republičke nagrade "Ruđer Bošković" 1960. godine;
- dobitnik je Republičke nagrade za životno djelo 1970. godine;
- bio je rektor Sveučilišta u Zagrebu u dva mandata, 1968.–1972. godine;
- bio je predsjednik Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti u dva mandata 1991.–1997. godine.

akademik Ksenofont Ilakovac



Zadaci s prijemnih ispita na Matematičkom odjelu i Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakuteta u Zagrebu, 2007. g.

Kao dio razredbenog postupka u prvom upisnom roku, 12. srpnja 2007. godine održan je test provjere znanja na PMF – Matematičkom odjelu i PMF – Fizičkom odsjeku. Uz dozvolu ovih institucija, donosimo zadatke koji su bili zadani na tom testu.

Test na PMF – Matematičkom odjelu sadržavao je zadatke M-1 – M-20, I-1 – I-5 i F-1 – F-8, a test na PMF – Fizičkom odsjeku zadatke M-1 – M-20 i F-1 – F-13.

Kod zadataka iz fizike možete uzeti da je $g = 10$ m/s^2, $c = 300\,000$ km/s, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

Zadaci iz matematike

M-1. Točan odgovor na testu donosi 20 bodova, netočan donosi -5 bodova, a neoznačavanje odgovora donosi 0 bodova. Pristupnik je odgovorio na 27 pitanja i osvojio 340 bodova. Na koliko je pitanja odgovorio točno?
A. 15 **B.** 18 **C.** 17 **D.** 16 **E.** 19

M-2. Ako su A i B skupovi za koje vrijedi $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A$, onda nužno vrijedi
A. $B = \emptyset$ **B.** $A \subseteq B$ **C.** $B \subseteq A$ **D.** $A = \emptyset$ **E.** $A \cap B = \emptyset$

M-3. Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima zbroj znamenaka iznosi 6?
A. 28 **B.** 15 **C.** 6 **D.** 21 **E.** 18

M-4. Ako je $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + n = 1012036$, onda je
A. $n = 2011$ **B.** $n = 2007$ **C.** $n = 2009$ **D.** $n = 2005$ **E.** $n = 2003$

M-5. Kvocijent najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja brojeva $2^m 3^n$ i $2^n 3^m$, pri čemu su $m, n \in \mathbf{N}$ i $m > n$, iznosi
A. $2^{m+n} 3^{m+n}$ **B.** 6^{n-m} **C.** 6^{m-n} **D.** $2^{m-n} 3^{n-m}$ **E.** $2^{n-m} 3^{m-n}$

M-6. Koji je od navedenih brojeva iracionalan?
A. $4^{5/2}$ **B.** $(\sqrt{2})^4$ **C.** $4^{-1/2}$ **D.** $8^{2/3}$ **E.** $8^{1/2}$

M-7. Najveća vrijednost funkcije $f(x) = 6 - x - x^2$ za $x \in [1, 3]$ iznosi
A. 4 **B.** $\frac{25}{4}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 6 **E.** -6

M-8. Ako su x, y realni brojevi, i imaginarna jedinica te ako vrijedi $(1+i)x + (2+3i)y = 1 - i$, onda je $x + y$ jednako
A. -1 **B.** 7 **C.** 1 **D.** 3 **E.** 0

M-9. Za koje vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ jednadžba $\alpha(x-1) = (x-\alpha)^2$ nema realnih rješenja?
A. $\alpha \in \left\langle 0, \frac{4}{5} \right\rangle$ **B.** $\alpha \in \left[-\frac{4}{5}, 0 \right]$ **C.** $\alpha \in \left\langle \frac{4}{5}, +\infty \right\rangle$
D. $\alpha \in \left[0, \frac{4}{5} \right]$ **E.** $\alpha = 0$

M-10. Koji je od navedenih polinoma djeljiv s $(x-1)(x-2)$?

A. $x^5 - x^4 + x^2 + x - 2$ **B.** $x^4 - 2x^3 - x + 2$ **C.** $x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 3$
D. $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5x - 2$ **E.** $x^3 - 2x + 1$

M-11. Funkcija $f(x) = \log_x \sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x-2}}$ definirana je za

A. $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$ **B.** $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$
C. $x \in \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1, 2\}$ **D.** $x \in \langle 0, 2\rangle \setminus \{1\}$ **E.** $x \in \langle 2, +\infty\rangle$

M-12. Koliko rješenja ima sustav linearnih jednadžbi $\begin{matrix} x + y = 2 + \lambda \\ -x + \lambda y = -1 \end{matrix}$ ovisno o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$?

A. Za $\lambda = -1$ ima beskonačno mnogo rješenja, a za $\lambda \neq -1$ ima jedno rješenje.
B. Za svaki $\lambda \in \mathbf{R}$ ima jedno rješenje.
C. Za $\lambda = 1$ ima beskonačno mnogo rješenja, a za $\lambda \neq 1$ ima jedno rješenje.
D. Za $\lambda = -1$ nema rješenja, a za $\lambda \neq -1$ ima jedno rješenje.
E. Za $\lambda = 1$ nema rješenja, a za $\lambda \neq 1$ ima jedno rješenje.

M-13. Rješenje jednadžbe $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3(5x)} = 16^{\log_9(25x^2)}$ leži u intervalu

A. $\langle 0, 1]$ **B.** $\langle -\infty, 0]$ **C.** $\langle 1, 5]$ **D.** $\langle 5, 25]$ **E.** $\langle 25, +\infty\rangle$

M-14. Koja je od sljedećih nejednakosti točna za svaki $x \in \mathbf{R}$?

A. $\cos(2\sin x) > 0$ **B.** $\sin(\sin x) > 0$ **C.** $\sin(\cos x) > 0$
D. $\cos(2\cos x) > 0$ **E.** $\cos(\cos x) > 0$

M-15. Srednjica trokuta dijeli ga na manji trokut i na trapez kojima se površine odnose kao

A. ovisi o početnom trokutu **B.** 1 : 3 **C.** 1 : 2 **D.** 1 : 4 **E.** 2 : 3

M-16. Točke D i E nalaze se redom na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakostraničnog trokuta ABC sa stranicom duljine a. Ako vrijedi $|CD| = |CE|$ i ako se u četverokut $ABED$ može upisati kružnica, onda je $|CD|$ jednako

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a}{3}$ **C.** $\frac{a}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **E.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

M-17. Kolika je površina dijela kruga sa središtem u ishodištu polumjera 1 koji je u prvom kvadrantu i ispod pravca $x = y\sqrt{3}$?

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{11\pi^2}{12}$ **D.** $\frac{2\pi}{3}$ **E.** $\frac{\pi}{12}$

M-18. Graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x + 2$ možemo dobiti tako da parabolu $y = x^2$

A. translatiramo po x-osi za 1 udesno, a zatim po y-osi za 1 prema gore
B. translatiramo po x-osi za 2 ulijevo, a zatim po y-osi za 2 prema dolje
C. translatiramo po y-osi za 1 prema gore, a zatim po x-osi za 2 ulijevo
D. zrcalimo s obzirom na pravac $y = 2x - 2$
E. zrcalimo s obzirom na pravac $x = 1$

M-19. Broj točaka koje leže na kružnici $x^2 + y^2 = 2$, a jednako su udaljene od pravaca $x + 2y - 1 = 0$ i $x - 2y + 3 = 0$ je

A. 0 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2 **E.** 4

M-20. Kvadrat sa stranicom duljine a rotira oko svoje dijagonale. Volumen tako dobivenog tijela jednak je

A. $\frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\frac{4\sqrt{2}\,\pi a^3}{3}$ **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$ **E.** $\frac{a^2\pi\sqrt{3}}{6}$

Zadaci iz informatike

I-1. Odredite bazu b tako da broj $(341)_b$ bude dvostruko veći od broja $(143)_b$.
A. $b=1$ **B.** $b=5$ **C.** $b=-1$ **D.** $b=4$ **E.** $b=6$

I-2. Za koju od navedenih logičkih formula istinosna vrijednost ne ovisi o varijabli B?
A. $(B\vee\neg A)\wedge(A\vee\neg B)$ **B.** $(A\wedge B)\vee((A\vee B)\wedge\neg B)$ **C.** $(A\vee\neg A)\wedge B$
D. $(\neg A\vee\neg B)\wedge A$ **E.** $(A\wedge B)\vee\neg A$

I-3. Koji će broj ispisati sljedeći algoritam?

```
x := 0 ;
za i := 1 do 10 činiti
|  y := 0 ;
|  za j := 1 do i činiti
|  |  y := y + i ;
|  x := x + y ;
izlaz x ;
```

A. 385 **B.** 220 **C.** 100 **D.** 121 **E.** 55

I-4. Odredite koliko iznosi $f(45)$, ako je $f(1)=0$ i ako za prirodne brojeve $n\geqslant 2$ vrijedi

$$f(n)=\begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right)+1, & \text{za } n \text{ paran,}\\ f\left(\frac{n-1}{2}\right)+f(n-1), & \text{za } n \text{ neparan.}\end{cases}$$

A. 18 **B.** 16 **C.** 15 **D.** 14 **E.** 17

I-5. Što od navedenog **nije** mjera za količinu memorije?
A. megabajt **B.** bit **C.** bajt **D.** gigaherc **E.** gigabajt

Zadaci iz fizike

F-1. Tijelo slobodno pada iz mirovanja s tornja visokoga 150 m. Na kojoj je visini kada prođe pola ukupnog vremena pada?
A. 50 m **B.** 75 m **C.** 37.5 m **D.** 100 m **E.** 112.5 m

F-2. Koliko bi trebao biti dugačak dan da tijela na ekvatoru ne pritišću na površinu Zemlje? Polumjer Zemlje je 6370 km.
A. 49 h 53 min 3 s **B.** 4 h 28 min 15 s **C.** 1 h 23 min 35 s
D. 13 min 18 s **E.** 51 min 46 s

F-3. Osoba knjigu težine 20 N pritišće o strop silom od 25 N. Kolikom silom djeluje strop na knjigu?
A. 45 N **B.** 20 N **C.** 5 N **D.** 0 N **E.** 25 N

F-4. Elektron ulijeće brzinom 10^6 m/s u homogeno električno polje jakosti 10 N/C okomito na silnice polja. Koliki će mu biti kut otklona od početne putanje kad nakon 10^{-7} s izleti iz polja? Masa elektrona je $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, a naboj elektrona $1.6 \cdot 10^{-19}$ C.
A. $0°11'$ **B.** $0°18'$ **C.** $1°78'$ **D.** $9°58'$ **E.** $46°27'$

F-5. Stranice kvadrata su otpornici otpora 1 Ω, međusobno povezani u vrhovima kvadrata. Koliki je ekvivalentni otpor između dvaju susjednih vrhova kvadrata?
A. 1.33 Ω **B.** 4 Ω **C.** 1 Ω **D.** 0.75 Ω **E.** 0.25 Ω

F-6. Koliko puta se promijeni rezonantna frekvencija serijskog LC titrajnog kruga ako svakom elementu u krugu serijski priključimo još jedan isti element?
A. 4 puta **B.** 2 puta **C.** ne promijeni se **D.** 0.5 puta **E.** 0.25 puta

F-7. Olovno tane palo je s neke visine na zemlju. Zbog udarca o zemlju se zagrijalo, a na zagrijavanje se potrošilo 50% njegove energije. Temperatura mu se promijenila za 39 °C. S koje visine je palo tane? Toplinski kapacitet olova je 130 J/(kg · K).
A. 1014 m **B.** 2028 m **C.** 507 m **D.** 75 m **E.** 355 m

F-8. Čelični most ima duljinu 518 m na temperaturi 0 °C. Za koliko se može promijeniti duljina mosta ako se ekstremne temperature na tom području kreću od −20 °C do +35 °C? Linearni koeficijent rastezanja čelika je $1.1 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.
A. 3.2 m **B.** 6 cm **C.** 1.55 m **D.** 0.31 m **E.** 62 cm

F-9. Skakač s mosta ("bungee jumper") mase 80 kg privezan je o elastično uže duljine 25 m u nerastegnutom stanju. Konstanta elastičnosti užeta je 200 N/m. Skakač se pusti s mosta bez početne brzine. Kolika je minimalna visina mosta da skakač ne dodirne površinu vode? Zanemarite masu užeta, visinu skakača i silu otpora zraka.
A. 29 m **B.** 43.7 m **C.** 18.6 m **D.** 52.5 m **E.** 30.3 m

F-10. Metalni prsten otpora 0.1 Ω i radijusa 10 cm nalazi se u magnetskom polju okomitom na ravninu prstena koje raste brzinom 10 μT/s. Kolika struja teče prstenom?
A. 6.28 μA **B.** 0.5 μA **C.** 1 μA **D.** 3.14 μA **E.** 1 mA

F-11. Jedna jezgra ^{235}U oslobodi pri nuklearnoj fisiji energiju od 201 MeV. Kolika se masa tog izotopa urana utroši u nuklearnom reaktoru u toku jedne sekunde, kada reaktor radi snagom od 50 MW? Masa jezgre atoma ^{235}U je $3.9 \cdot 10^{-25}$ kg.
A. 35 μg **B.** 0.32 μg **C.** 3 mg **D.** 0.02 mg **E.** 0.6 mg

F-12. Elektron se iz mirovanja ubrzava naponom od 511 kV. Kolika je njegova relativistička brzina nakon ubrzavanja? Energija mirovanja elektrona je $m_e c^2 =$ 511 keV.
A. $4.2 \cdot 10^8$ m/s **B.** $2.6 \cdot 10^8$ m/s **C.** $3.7 \cdot 10^7$ m/s
D. $1.5 \cdot 10^8$ m/s **E.** $9.8 \cdot 10^7$ m/s

F-13. Kut prizme je 40°. Koliki je indeks loma prizme, ako se zraka koja pada okomito na jednu plohu lomi tako da izlazi duž druge plohe prizme? Nema refleksija na plohama prizme, a spomenute dvije plohe razapinju kut prizme.
A. 1.56 **B.** 2 **C.** 1.31 **D.** 1.41 **E.** 1.78



O bridžu je napisano na tisuće knjiga, više nego o svim drugim igrama zajedno (uključujući i šah). Još se više materijala može pronaći na različitim stranicama weba zaljubljenika u ovu igru. Među svima, jedna je stranica posebna, `www.rpbridge.net` Richarda Pavliceka. Teško je procijeniti koliko je vremena potrebno da se samo prelista sadržaj te stranice.

U moru različitih problema, pitalica, kvizova i inog materijala, slučajnim odabirom zaustavio sam se na sljedeća tri (jednostavna) problema. Provjerite svoju logiku i napravite kontrakt 6NT. Trebate, dakle, osvojiti 12 štihova u igri bez aduta, bez obzira na raspored karata i igru protivnika. Nalazite se na poziciji **S**, a karte i ataka su kako slijedi:

Problem 1. Ataka: ♡J.

♠ A K J 9 2
♡ 5 2
♢ Q
♣ A K 8 6 2

N
W E
S

♠ 10
♡ A K Q 4 3
♢ A K 6 3 2
♣ J 10

Problem 2. Ataka: ♠4.

♠ A Q J 10
♡ A 4
♢ J 10 9 8 7
♣ 3 2

N
W E
S

♠ K
♡ K Q 3
♢ A Q
♣ A Q 9 7 6 5 4

Problem 3. Ataka: ♣Q.

♠ J 10 9 3 2
♡ J 10 4 3
♢ 10 3
♣ 9 3

N
W E
S

♠ A Q
♡ A Q
♢ A K Q J 2
♣ A K 10 2

Rješenja. **1.** Deset je visokih štihova, dodatna dva mogu se napraviti u piku. Međutim, problem je komunikacija između dvije ruke. Ispravna igra je: uzeti ataku, odigrati karo do dame (deblokada u toj boji) i zatim dvojku pik! Najbolja igra protivnika je da ne uzme damom, nakon čega slijedi tref do asa i tri puta pik.

U bilo kojoj drukčijoj sekvenci igre, postoji raspored karata koji će srušiti kontrakt. Uvjerite se u to!

2. Sad dodatne štihove treba potražiti u karonu. Odigramo li karo do asa i zatim damu karo (ili obrnuto), kontrakt je u opasnosti jer protivnik ne mora uzeti štih kraljem. Postoji samo jedan ulaz na stol (herc as) i izvođač nije u mogućnosti napraviti više od dva štiha karonom.

Jedina ispravna igra je uzeti ataku asom pik i na sljedeća dva pika odbaciti asa i damu karo! Nakon toga nastavljamo igrati karo sa stola dok ne skupimo dovoljan broj štihova.

3. Uzet ćemo ataku. Što sad? Mnogo je potencijalnih dodatnih štihova, ali samo jedan način da se sa sigurnošću napravi kontrakt.

U drugom štihu treba odigrati damu pik! Ako protivnik uzme, napravit ćemo 4 pik štiha, 1 herc, 5 karona i 2 trefa. Ako on ne uzme taj *danajski* dar, u sljedećem štihu ćemo ponuditi novi: damu herc! Uzmu li protivnici ovaj štih, napravit ćemo 2 pika, 3 herca, 5 karona i 2 trefa. Ako ne uzmu, slijedi dvojka tref! Bez obzira što se u tom štihu dogodi, napravit ćemo 2 pika, 2 herca, 5 karona i 3 trefa.

Neven Elezović, Zagreb

Rješenje nagradnog natječaja br. 178

Rješenje. Neka su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $px^2+pqx+q=0$. Prema Vièteovim formulama je $x_1x_2=\dfrac{q}{p}$, $x_1+x_2=-q$.

Kvocijent prostih brojeva $\dfrac{q}{p}$ je cijeli broj ako i samo ako je $p=q$. Tada je $x_1=x_2=-1$ i $p=q=2$.

Knjigom su nagrađeni sljedeći rješavatelji:

1. *Edin Ajanović* (2), I. bošnjačka gimnazija, Sarajevo; 2. *Igor Boban* (3), III. gimnazija, Split; 3. *Mehmed Brkić* (4), II. gimnazija, Sarajevo; 4. *Haris Čaušević* (3), Treća gimnazija, Sarajevo; 5. *Ervin Duraković* (4), Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka; 6. *Gabrijel Guberović* (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška.

Riješili zadatke iz br. 2/226

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Edin Ajanović* (2), I. bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH, 3037, 3039–3041, 3047; *Ivo Božić* (1), XV. gimnazija, Zagreb, 3036, 3042; *Mehmed Brkić* (4), Druga gimnazija, Sarajevo, BiH, sve; *Haris Čaušević* (3), Treća gimnazija, Sarajevo, BiH, 3035, 3037–3039, 3043–3047; *Tomislav Dokoza* (3), Tehnička škola Požega, Požega 3037, 3044; *Gabrijel Guberović* (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 3036, 3037, 3039–3042, 3044; *Sara Muhvić* (3), III. gimnazija, Osijek, 3037, 3039, 3042; *Vedran Rafaelić* (3), Opća gimnazija, SŠ Vladimira Gortana, Buje, 3036–3039, 3041, 3042; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 3036, 3041, 3042.

b) Iz fizike: *Anamarija Birkeš* (7), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 258; *Emanuel Guberović* (7), OŠ Ljudevita Gaja, Nova Gradiška, 259; *Maja Iljadica* (7), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 258; *Josipa Unić* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 258–261; *Barbara Grubišić-Čabo* (1), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1357; *Lucija Ivanda* (1), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1357; *Gabrijel Guberović* (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 1357, 1358, 1363; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 1357.

Rješenja zadataka s prijemnog ispita

M-1	E	M-2	C	M-3	D	M-4	A	M-5	C
M-6	E	M-7	A	M-8	D	M-9	D	M-10	B
M-11	E	M-12	A	M-13	A	M-14	E	M-15	B
M-16	B	M-17	E	M-18	A	M-19	B	M-20	A
I-1	B	I-2	B	I-3	A	I-4	E	I-5	D
F-1	E	F-2	C	F-3	C	F-4	D	F-5	D
F-6	C	F-7	A	F-8	D	F-9	B	F-10	D
F-11	E	F-12	B	F-13	A				

Nagradni natječaj br. 180

Koliko realnih rješenja ima jednadžba $\sqrt[7]{x} - \sqrt[5]{x} = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$?

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko–fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

⋆ ⋆ ⋆

Ispravka

U MFL-u br. 4/ 228 na stranici 278 greškom je otisnuto 5. **Žunić Damir, Srednjoškolski centar, Gračanica**. Ispravno je 5. Žunić Damir, Srednjoškolski centar, Gračanica, BiH.

Dragi čitatelji!

Ovaj časopis sa skoro već 60-godišnjom tradicijom nastoji da bude pristupačan, prije svega, onima koje matematika i fizika zanima više nego što se uči u redovnom školskom programu. Željeli bismo da on bude što interesantniji i korisniji u srednjoj školi, a da vam pomogne i za kasniji studij matematike, fizike ili drugih, prvenstveno tehničkih fakulteta. Mnogi čitatelji i suradnici Matematičko-fizičkog lista danas su poznati znanstvenici na raznim fakultetima ili institutima, a još je veći broj onih koji su u neposrednom kontaktu s učenicima u školi. Upravo oni mogu pomoći da list bude što bolji. Zato vas pozivamo da se javite i da iznesete svoje prijedloge za nove rubrike i teme za članke, da potičete i učenike da se što češće jave kojim zanimljivim prilogom. I mi ćemo nastojati da proširimo uredništvo lista, posebno mlađim djelatnicima u školi i na fakultetima.

Nadamo se da ćete i u ovom broju naći dovoljno zanimljivih priloga. Studentica Ksenija Pukšec i docent Josip Matejaš na Ekonomskom fakutetu u Zagrebu u prilogu Verižni (lančani) račun, opisuju jedan od elementarnih računa u gospodarskoj matematici. Uz poticaj profesora emeritusa Mirka Radića grupa studenata na Filozofskom fakultetu u Rijeci, u okviru Seminara za diplomski rad, priredila je zanimljiv članak O poligonima kojima su sve stranice i svi kutovi jednaki. U jednom kratkom članku, Lijepa analogija, naš stalni suradnik, profesor Mladen Halapa, opisuje kako izračunati ploštinu trokuta i obujam piramide. Pisali smo već o našem poznatom matematičaru Willimu Felleru koji je napisao knjige iz teorije vjerojatnosti koje su prevedene na nekoliko jezika, ali ne i na naš. Studentica Maja Sekulić, na Fakultetu eletrotehnike i računarstva, za seminarski rad je prevela uvodni dio njegove knjige An Introduction to Probability Theory and Its Applications, koji je pisan jednostavnim jezikom i može poslužizi kao mali uvod i u odgovarajući srednjoškolski predmet na gimnazijama s matematičkim usmjerenjem.

Neke prirodne pojave traju vrlo kratko i o mjerenju njihovog trajanja u članku Femtosekundni laseri – preciznost u vremenu i frekvenciji upoznaje nas Ticijana Ban, viša znanstvena suradnica u Laboratoriju za femtosekundnu lasersku spektroskopiju Instituta za fiziku u Zagrebu.

U rubrici *Iz moje radionice i laboratorija* Jakov Labor, profesor iz Šibenika, u prilogu Istraživanje uzajamne ovisnosti snage zračenja i temperautre, opisuje eksperiment kojim se to može provjeriti.

Što je astronomija, a što astrofizika upoznaje nas Dario Hrupec, asistent u Institutu "Ruđer Bošković".

Uz prilog o dobitnicima Nobelove nagrade za fiziku 2007. godine ima još dosta priloga, a zadnja strana omota je posvećena nedavno preminulom, također dobitniku Nobelova nagrade za fiziku 1991. g., Pierre-Gilles de Gennesu iz Francuske, koji je posjećivao i Hrvatsku, a posljednjih desetak godina se posvetio i nastavi fizike u srednjim školama.

Zadnjih trisedetak godina gđa Ana Zidić je bila tajnica Matematičko-fizičkog lista, koja je uz ovaj obavljala i druge administrativne poslove Društva matematičara i fizičara Hrvatske, a osnivanjem odvojenih društava i odgovarajuće poslove Hrvatskog fizikalnog društva. Početkom 2008. godine ide u zasluženu mirovinu. Vodila je stalnu, bezgraničnu brigu o pretlatnicima i o propagandi lista, na čemu joj se najiskrenije zahvaljujemo.

Od početka 2008. godine mijenja se adresa Uredništva MFL-a, stoga Vas molimo da Vaše priloge šaljete na novu adresu:

Matematičko-fizički list, Bijenička 32, 10 000 Zagreb

Uredništvo lista



Verižni (lančani) račun

Ksenija Pukšec[1] *i Josip Matejaš*[2], *Zagreb*

Uvod

Verižni (lančani) račun je postupak nalaženja veze između dviju veličina koje su međusobno vezane nizom proporcionalnih veličina. To je jedan od elementarnih računa gospodarske matematike (vidjeti [2]) koji se provodi po vrlo jednostavnim pravilima, a ima široku primjenu. Može se koristiti za preračunavanje mjernih jedinica, pa njime jednostavno uspoređujemo količine, mase, volumene, duljine, cijene, novčane vrijednosti itd. (vidjeti [1], [3]), a koje su izražene jedinicama iz različitih mjernih sustava. Neke od tih primjena navodimo u ovom prilogu.

Pravila postavljanja lančanog računa

Pravila postavljanja i postupak provođenja lančanog računa objašnjavamo na sljedećem slikovitom primjeru.

Primjer 1. Ako 5 banana ima masu kao 8 jabuka, 20 limuna kao 12 naranči, 4 kruške kao 10 šljiva, 5 limuna kao 2 banane te 6 jabuka kao 9 krušaka, koliko šljiva ima masu kao jedna naranča?

Čitajući zadatak vidimo da je dosta "zapetljan", tako da nije odmah jasno odakle početi. Ako navedeno voće označimo njegovim početnim slovom (b, j, l, n, k, $š$), iz uvjeta zadatka imamo

$$5b = 8j \implies b = \frac{8}{5}j, \tag{1}$$

$$20l = 12n \implies n = \frac{20}{12}l, \tag{2}$$

$$4k = 10š \implies k = \frac{10}{4}š, \tag{3}$$

$$5l = 2b \implies l = \frac{2}{5}b, \tag{4}$$

$$6j = 9k \implies j = \frac{9}{6}k. \tag{5}$$

[1] Studentica i demonstratorica iz matematike na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu (puksec@gmail.com).

[2] Docent na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu (josip.matejas@kr.htnet.hr).

Koristeći sada dobivene relacije sljedećim redom: (2), (4), (1), (5) i (3), dobivamo

$$n = \frac{20}{12}\,l = \frac{20}{12} \cdot \frac{2}{5}\,b = \ldots = \frac{20 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{12 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4}\,\check{s} = 4\check{s}, \tag{6}$$

dakle, jedna naranča ima masu kao 4 šljive.

U skladu s relacijom (6), uvjete zadatka možemo zapisati i ovako

$x\ \check{s}$	$1\ n$
$12\ n$	$20\ l$
$5\ l$	$2\ b$
$5\ b$	$8\ j$
$6\ j$	$9\ k$
$4\ k$	$10\ \check{s}$

a što predstavlja zapis u obliku *lančanog računa*. Iz navedenog zapisa i jednakosti (6), lako uočavamo sljedeća pravila postavljanja lančanog računa:

1. Lančani račun započinje pitanjem (kojim je definirana nepoznanica).
2. Novi redak lančanog računa počinje onom veličinom (jedinicom) kojom je prethodni redak završio.
3. Račun završava onom veličinom (jedinicom) kojom je i započeo.
4. Nepoznanicu izračunamo kao kvocijent umnoška desne i umnoška preostalih članova lijeve strane.

Iz pravila 2 i 3 vidimo smisao naziva verižni (lančani) račun. Primijetimo da je pravilo 4 ekvivalentno činjenici da je umnožak desne strane jednak umnošku lijeve strane.

Primjene

Od vrlo raznolikih primjena lančanog računa navodimo neke od njih, uglavnom ekonomskog karaktera. Počnimo sljedećim praktičnim primjerom.

Primjer 2. Prilikom geološkog ispitivanja novog nalazišta aluminijeve rude dobiveni su sljedeći podaci. Iz 40 kg rude u prvoj fazi prerade dobije se 2.15 kg boksita. Kemijskim postupkom u drugoj fazi prerade iz 1.4 kg boksita dobije se 425 g aluminijeva oksida. Elektrolizom u trećoj fazi prerade iz 350 g aluminijeva oksida dobije se 155 g aluminija. Da li je ovo nalazište isplativo za korištenje ako znamo da je isplativa prerada one rude koja sadrži bar 1% aluminija?

Sve količine izražavamo u gramima. Postavljamo pitanje: koliko je rude potrebno za proizvodnju jednog grama aluminija? Imamo

x rude	1 al.
155 al.	350 al.oks.
425 al.oks.	1 400 boks.
2 150 boks.	40 000 rude

pa je

$$x = \frac{1 \cdot 350 \cdot 1400 \cdot 40\,000}{155 \cdot 425 \cdot 2150} \approx 138.39.$$

Dakle, za 1 gram aluminija potrebno je nešto više od 138 grama rude a to znači da je sadržaj aluminija manji od 1% pa nalazište nije isplativo.

Određenim poopćavanjem uvjeta na koje se lančani račun primjenjuje, dolazimo do sljedećeg teorijskog primjera.

Primjer 3. Zadan je linearni sustav

$$a_k x_k = b_{k+1} x_{k+1}, \quad a_k, b_{k+1} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad x_{n+1} = x_1$$

gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nepoznanice. Za zadane indekse $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ odredite α_{ij} takve da vrijedi $x_i = \alpha_{ij} x_j$.

Ako je $i = j$ tada je očito $\alpha_{ij} = 1$. Ako je $i < j$ tada imamo

$$\begin{array}{c|c} \alpha_{ij} x_j & x_i \\ a_i x_i & b_{i+1} x_{i+1} \\ a_{i+1} x_{i+1} & b_{i+2} x_{i+2} \\ \ldots & \ldots \\ a_{j-1} x_{j-1} & b_j x_j \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{ij} = \frac{b_{i+1} b_{i+2} \cdot \ldots \cdot b_j}{a_i a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_{j-1}} = \frac{\prod_{k=i+1}^{j} b_k}{\prod_{k=i}^{j-1} a_k},$$

gdje $\prod$ označava operator umnoška.

Za $i > j$ u dobivenoj relaciji indeksima i i j zamijenimo mjesta te uvažimo da je $\alpha_{ij} = 1/\alpha_{ji}$. Vratimo se opet praktičnim primjenama.

Primjer 4. Jedno zagrebačko uvozno-izvozno poduzeće uvozi 2500 litara šampanjca iz Francuske za 15 000 EUR. Odredite cijenu tog šampanjca u Zagrebu ako poduzeće za 1 EUR plaća 7.42 HRK, transportni troškovi su 8% a carina 15% nabavne cijene, marža je 5% tako dobivene veleprodajne cijene a PDV je 22%.

Jednostavno slijedimo pravila lančanog računa

x HRK	1 l
2500 l	15 000 EUR
1 EUR	7.42 HRK
100 HRK	123 HRK (t.t. i carina)
100 HRK	105 HRK (marža)
100 HRK	122 HRK (PDV)

$$\Longrightarrow \quad x = 70.15 \text{ HRK}.$$

Primijetimo da smo, po pravilima, račun mogli završiti nakon trećeg retka a zatim primjeniti postotni račun (tri puta). Međutim, kao što vidimo, sve se to može elegantno ukorporirati u sam lančani račun u skladu s njegovim pravilima. Tako npr. obračunati maržu od 5% znači da svakih 100 novčanih jedinica (HRK) cijene sada postaje 105 itd.

Preračunavanje mjernih i novčanih jedinica jedna je od značajnih primjena lančanog računa. Takav je i sljedeći primjer.

Primjer 5. Ako za 2297 kuna i 10 lipa dobijemo 380 USD, za 4059 kuna i 22 lipe dobijemo 550 EUR a za 6300 EUR trebamo platiti 7665 USD, koliko EUR možemo dobiti za 9999 kuna i 99 lipa?

Primijetimo da, prema uvjetima zadatka, imamo dvije mogućnosti:

1. Za HRK kupujemo EUR:

$$\begin{array}{r|l} x_1 \text{ EUR} & 9999.99 \text{ HRK} \\ 4059.22 \text{ HRK} & 550 \text{ EUR} \end{array} \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 1354.94 \text{ EUR}.$$

2. Za HRK kupujemo USD a zatim za USD kupujemo EUR:

$$\begin{array}{r|l} x_2 \text{ EUR} & 9999.99 \text{ HRK} \\ 2297.10 \text{ HRK} & 380 \text{ USD} \\ 7665 \text{ USD} & 6300 \text{ EUR} \end{array} \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 1359.66 \text{ EUR}.$$

Vidimo da smo, zbog razlike u tečaju pojedinih deviza, dobili različite rezultate pa možemo birati povoljniju mogućnost a to je za nas prva od njih. Takav postupak naziva se *arbitraža deviza i roba*: razlike u cijenama roba i tečaju deviza na različitim tržištima možemo iskoristiti u svrhu povoljnijeg podmirenja dugovanja ili potraživanja, jeftinije kupnje ili skuplje prodaje te ostvarivanja bolje diferencije (zarade) itd. Tu je jedna od najznačajnijih primjena lančanog računa u ekonomiji. Pokažimo arbitražu na još nekim primjerima.

Primjer 6. Kako hrvatski turist može najpovoljnije kupiti kameru u Budimpešti čija je cijena 150 000 HUF, ako u Budimpešti notira deviza Beča 275 a deviza Zagreba 3400, dok u Zagrebu notira deviza Budimpešte 2.80 a deviza Beča 7.33?

Svaka deviza je novac koji na određenom tržištu ima određenu cijenu koju nazivamo *tečaj*. Ako je tečaj zadan (poznat) tada kažemo da deviza *kotira* ili *notira* na tom tržištu. Notiranje može biti izravno (broj jedinica domaće valute za 1 ili 100 jedinica strane) koje je na tržištima najčešće ili posredno (broj jedinica strane valute za 1 ili 100 jedinica domaće). Tako uvjeti zadatka znače da je
u Budimpešti: 275 HUF = 1 EUR, 3400 HUF = 100 HRK, odnosno
u Zagrebu: 2.80 HRK = 100 HUF, 7.33 HRK = 1 EUR.
Vidimo da hrvatski turist ima tri mogućnosti:

1. Promjena HRK u HUF u Budimpešti

$$\begin{array}{r|l} x_1 \text{ HRK} & 150\,000 \text{ HUF} \\ 3400 \text{ HUF} & 100 \text{ HRK} \end{array} \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 4411.76 \text{ HRK}.$$

2. Kupnja EUR u Zagrebu i promjena EUR u HUF u Budimpešti

$$\begin{array}{r|l} x_2 \text{ HRK} & 150\,000 \text{ HUF} \\ 275 \text{ HUF} & 1 \text{ EUR} \\ 1 \text{ EUR} & 7.33 \text{ HRK} \end{array} \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 3998.18 \text{ HRK}.$$

3. Kupnja HUF u Zagrebu

$$\begin{array}{r|l} x_3 \text{ HRK} & 150\,000 \text{ HUF} \\ 100 \text{ HUF} & 2.8 \text{ HRK} \end{array} \quad\Longrightarrow\quad x_3 = 4200 \text{ HRK}.$$

Za turista je najpovoljnija druga mogućnost. Uočimo osnovno značenje dobivenih rezultata: u svakoj od ove tri mogućnosti hrvatski turist treba platiti različit iznos HRK, dok trgovac u Budimpešti uvijek dobiva 150 000 HUF. Ne radi se tu o nikakvoj prijevari ili smicalici, dobivene razlike su posljedica razlika u tečaju pojedinih deviza na različitim tržištima. Očito je da u praksi, ako promatramo i neke druge valute, imamo još više mogućnosti.

Primjer 7. Gdje će uvozno-izvozna tvrtka iz Zagreba kupiti a gdje prodati aluminij ako je cijena aluminija u Sydneyu 22.85 AUD za 25 lb (lb = pound = 453.6 g), u New Yorku 1580 USD za 1 l.t. (l.t. = long tone = 1016 kg), u Osaki 110 000 JPY za 150 kann (kann = 3.75 kg), te ako Zagreb notira devizu Sydneya 4.38, devizu New Yorka 5.76 i devizu Osake 4.64, a troškovi transporta su u Sydneyu 16%, New Yorku 15% i Osaki 14%?

Vidimo da su cijene izražene u različitim valutama i različitim količinskim jedinicama. Kako nije dana količina aluminija koju treba kupiti (prodati), izabiremo je proizvoljno. Pitamo se: koliko HRK treba tvrtka izdvojiti za neku fiksnu količinu aluminija (npr. 1000 kg)? Imamo tri mogućnosti:

1. Kupnja (prodaja) aluminija u Sydneyu

x_1 HRK	1000 kg
0.4536 kg	1 lb
25 lb	22.85 AUD
1 AUD	4.38 HRK
100 HRK	116 HRK

$$\Longrightarrow \quad x_1 = 10\,237.77 \text{ HRK}.$$

2. Kupnja (prodaja) aluminija u New Yorku

x_2 HRK	1000 kg
1016 kg	1580 USD
1 USD	5.76 HRK
100 HRK	115 HRK

$$\Longrightarrow \quad x_2 = 10\,301.10 \text{ HRK}.$$

3. Kupnja (prodaja) aluminija u Osaki

x_3 HRK	1000 kg
3.75 kg	1 kann
150 kann	110 000 JPY
100 JPY	4.64 HRK
100 HRK	114 HRK

$$\Longrightarrow \quad x_3 = 10\,344.11 \text{ HRK}.$$

Za tvrtku je najpovoljnija kupnja u Sydneyu a prodaja u Osaki. Pri tome se ostvaruje diferencija (zarada) od $10\,344.11 - 10\,237.77 = 106.34$ HRK na svakih 1000 kg. Na temelju te diferencije procjenjujemo isplativost ulaska u navedeni uvozno-izvozni posao.

Na kraju napomenimo, a što je jasno iz navedenih primjera, da se kod arbitraže koju provodimo lančanim računom u svim razmatranim mogućnostima, u svrhu direktne usporedbe, treba postaviti *isto pitanje*.

Zadaci za vježbu

1. Srednja udaljenost Mjeseca od Zemlje je 384 400 km. Ako je 1 px (pixel) = 263.6 μm, 1 ft (stopa) = 12 in (inć) = 30.48 cm, 1 mi (milja) = 1609 km te 1 ls (svjetlosna sekunda) = 299 800 km, izrazite navedenu udaljenost u pixelima, inćima, miljama i svjetlosnim sekundama.

Rješenje. 1 458 270 106 222 px = 15 133 858 268 in = 238 906.153 mi = 1.2822 ls.

2. Ako 50 AUD vrijedi kao 4520 JPY, 120 GBP kao 255 CAD a 10 000 JPY kao 45 GBP, koliko CAD vrijedi 100 AUD?

Rješenje. 86.445 CAD.

3. Pas, mačak i miš ugledaše komad sira i istovremeno pojuriše prema njemu. Ako je pas udaljen od sira 27 svojih skokova, mačak 23 svoja skoka a miš 50 svojih skokova, tko će od njih prvi ugrabiti sir? Znamo da 3 skoka psa imaju istu duljinu kao i 5 skokova mačka a 2 mačja skoka iste su duljine kao i 9 skokova miša. Znamo također da je mačak dvostruko brži od miša a pas dvostruko brži od mačka.

Rješenje. Udaljenost od sira izrazimo u mišjim skokovima: pas 202.5, mačak 103.5, miš 50. S obzirom na njihove brzine, prvi dolazi miš (onda pas a zatim mačak).

4. Pretpostavimo da uvoznik iz New Yorka treba platiti njemačkom izvozniku iz Frankfurta 1 000 000 EUR za uvoz automobila. U New Yorku notira deviza Londona 1.5918 a deviza Frankfurta 1.1163, dok u Frankfurtu notira deviza Londona 1.4269 a deviza New Yorka 0.8976. Ispitajte na koje sve načine uvoznik može podmiriti svoj dug te koji mu je od tih načina najpovoljniji?

Rješenje. Kupnja EUR u New Yorku (1 116 300 USD), kupnja GBP u New Yorku i konverzija u EUR u Frankfurtu (1 115 565.21 USD), konverzija USD u EUR u Frankfurtu (1 114 082 USD) što je i najpovoljnije.

5. Gdje će tvrtka iz New Yorka kupiti a gdje prodati pšenicu ako ona kotira u Bonnu 22.74 EUR za 100 kg, u Stockholmu 1928.25 SEK za 1 m.t. (m.t. = metric tone = 1000 kg), u Londonu 120.81 GBP za 1 e.t. (e.t. = english tone = 1016 kg), a New York notira devizu Bonna 0.9225, devizu Stockholma 0.1079, devizu Londona 1.7050, dok su transportni troškovi iz Bonna 7%, iz Stockholma 3% te iz Londona 4%?

Rješenje. Za 100 kg pšenice plaća se: u Bonnu 22.45 USD, u Stockholmu 21.43 USD, u Londonu 21.08 USD. Kupnja u Londonu a prodaja u Bonnu (diferencija 1.37 USD na svakih 100 kg pšenice).

Literatura

[1] M. Babić, A. Babić, (2003) *Međunarodna ekonomija*, MATE, Zagreb.

[2] B. Relić, (2002) *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb.

[3] B. Šego, (2005) *Matematika za III. razred ekonomskih škola*, Neodidacta, Zagreb.

⋆ ⋆ ⋆

Bog postoji jer je matematika konzistentna,
đavo postoji jer ne možemo dokazati konzistentnost,

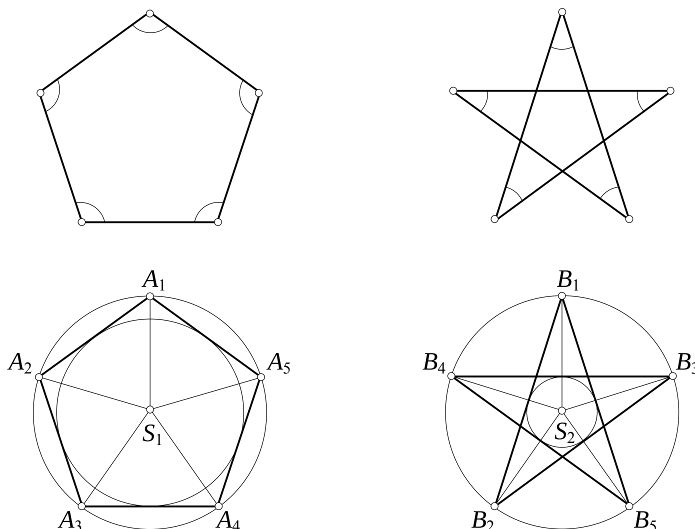
Moris Kleine

O poligonima kojima su sve stranice jednake i svi kutovi jednaki

Studenti matematike i informatike[1], *Rijeka*

Najprije ćemo ponoviti neke činjenice poznate iz osnovne škole.

Promotrimo sliku 1.



Slika 1.

Svaki od nacrtanih peterokuta ima sve stranice jednake i sve (unutarnje) kutove jednake. Lako je zaključiti da se svakom od njih može opisati i upisati kružnica i da je središte tih kružnica točka u kojoj se sijeku simetrale kutova. Naime, lako se vidi sukladnost odgovarajućih trokuta, tj. da je

$$\Delta S_1A_1A_2 \cong \Delta S_1A_2A_3 \cong \Delta S_1A_3A_4 \cong \Delta S_1A_4A_5 \cong \Delta S_1A_5A_1,$$

$$\Delta S_2B_1B_2 \cong \Delta S_2B_2B_3 \cong \Delta S_2B_3B_4 \cong \Delta S_2B_4B_5 \cong \Delta S_2B_5B_1.$$

Na isti način se uviđa da se svakom poligonu, koji ima sve stranice jednake i sve kutove jednake, može opisati i upisati kružnica.

Zadržimo se malo na kružnici opisanoj peterokutu $B_1B_2B_3B_4B_5$. Tu kružnicu obilazimo dva puta idući po njoj od vrha B_1 do vrha B_5. Primijetimo ovdje da je

$$\sphericalangle B_1S_2B_2 + \sphericalangle B_2S_2B_3 + \sphericalangle B_3S_2B_4 + \sphericalangle B_4S_2B_5 + \sphericalangle B_5S_2B_1 = 2 \text{ puna kuta},$$

[1] Rad su napisali studenti matematike i informatike četvrte godine Filozofskog fakulteta u Rijeci akademske 2006./ 2007. godine: J. Anić, A. Barić, S. Blašković, S. Bujačić, N. Bukal, M. Jadrić, I. Janežić, A. M. Kuharić, L. Kumpare, A. Lovrin, A. Lušini, M. Maksimović, K. Morsi, Ž. Načinović, I. Pendić, A. Pilipović, M. Sekulić, L. Simčić, M. Štanta, A. Švab, S. Vranić i I. Žikić.
Članak je inicirao profesor emeritus M. Radić na *Seminaru za diplomski rad*.

tj.

$$m\sphericalangle B_1S_2B_2 + m\sphericalangle B_2S_2B_3 + m\sphericalangle B_3S_2B_4 + m\sphericalangle B_4S_2B_5 + m\sphericalangle B_5S_2B_1 = 2 \cdot 360^\circ,$$

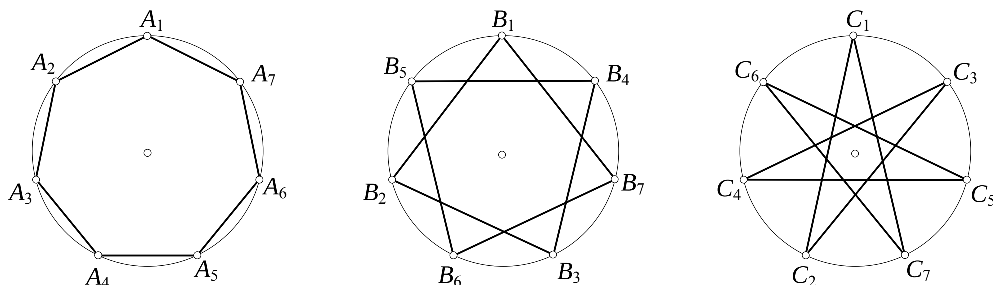
gdje slovo m označava riječ *mjera*. Zato se kaže da peterokut $B_1B_2B_3B_4B_5$ ima *kružnu opisanost* jednaku 2 ili, kraće rečeno, ima 2 *opisanost*.

Općenito, za poligon $A_1 \ldots A_n$ s n vrhova koji ima sve stranice jednake i sve kutove jednake kaže se da ima k *opisanost* ako je

$$m\sphericalangle A_1SA_2 + m\sphericalangle A_2SA_3 + \ldots + m\sphericalangle A_nSA_1 = k \cdot 360^\circ,$$

gdje S označava središte kružnice opisane poligonu $A_1 \ldots A_n$. Evo nekoliko primjera.

Peterokut $A_1A_2A_3A_4A_5$ na slici 1 ima 1 opisanost. Sedmerokut $A_1 \ldots A_7$ na slici 2 ima također 1 opisanost, dok sedmerokut $B_1 \ldots B_7$ na toj slici ima 2 opisanost. Sedmerokut $C_1 \ldots C_7$ na istoj slici ima 3 opisanost.



Slika 2.

Za svaki prirodan broj $n \geqslant 3$ postoji samo jedan poligon s n vrhova kojemu su sve stranice jednake i svi kutovi jednaki i ima opisanost 1. Taj poligon je *konveksan*, tj. ima svojstvo da za svake svoje dvije točke sadrži i sve točke između njih. Svi ostali poligoni s n vrhova koji imaju sve stranice jednake i sve kutove jednake su nekonveksni i svaki od njih ima opisanost veću od 1.

Uobičajeno je da se konveksni poligon koji ima sve stranice jednake i sve kutove jednake naziva *pravilnim poligonom*. Mi ćemo ga ovdje, radi kraćeg izražavanja u narednom tekstu, zvati *pravilnim konveksnim poligonom*, a sve ostale poligone koji imaju jednake stranice i jednake kutove zvat ćemo *pravilnim nekonveksnim poligonima* ili *zvjezdolikim pravilnim poligonima*.

Dokazat ćemo da vrijedi ovaj teorem.

Teorem 1. *Neka je* $A_1 \ldots A_n$ *pravilni poligon (konveksan ili nekonveksan) i neka je s* k *označena njegova opisanost. Tada je*

$$k \in \left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right\} \quad \textit{ako je } n \textit{ neparan broj},$$

ili

$$k \in \left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-2}{2}\right\} \quad \textit{ako je } n \textit{ paran broj.}$$

Drugim riječima, opisanost poligona $A_1 \ldots A_n$ *ne može biti veća od* $\frac{n-1}{2}$ *ako je* n *neparan broj ili od* $\frac{n-2}{2}$ *ako je* n *paran broj.*

Dokaz. Označimo s S središte kružnice opisane poligonu $A_1 \dots A_n$. Budući da je k opisanost poligona $A_1 \dots A_n$ mora vrijediti jednakost

$$m\sphericalangle A_1SA_2 + m\sphericalangle A_2SA_3 + \dots + m\sphericalangle A_nSA_1 = k \cdot 360^\circ$$

ili

$$m\sphericalangle A_1SA_2 = m\sphericalangle A_2SA_3 = \dots = m\sphericalangle A_nSA_1 = \frac{k \cdot 360^\circ}{n}$$

jer su kutovi $\sphericalangle A_1SA_2$, $\sphericalangle A_2SA_3, \dots, \sphericalangle A_nSA_1$ sukladni i svaki ima manje od 180°. Dakle, treba pokazati da je $k \leqslant \frac{n-1}{2}$ ako je n neparan i da je $k \leqslant \frac{n-2}{2}$ ako je n paran. Dokaz je lagan. Odmah se, naime, vidi da za neparni n vrijede nejednakosti

$$\left(\frac{n-1}{2} \cdot 360^\circ\right) : n < 180^\circ,$$

$$\left(\left(1 + \frac{n-1}{2}\right) \cdot 360^\circ\right) : n > 180^\circ,$$

jer se mogu napisati u obliku

$$(n-1) \cdot 180^\circ < n \cdot 180^\circ, \quad (n+1) \cdot 180^\circ > n \cdot 180^\circ.$$

U slučaju kad je n paran imamo jednu nejednakost i jednu jednakost

$$\left(\frac{n-2}{2} \cdot 360^\circ\right) : n < 180^\circ,$$

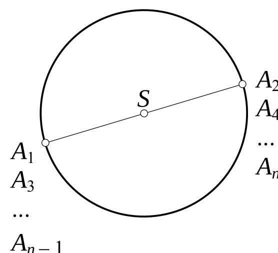
$$\left(\left(1 + \frac{n-2}{2}\right) \cdot 360^\circ\right) : n = 180^\circ,$$

koje se mogu pisati u obliku

$$(n-2) \cdot 180^\circ < n \cdot 180^\circ, \quad n \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ.$$

Primijetimo ovdje da u slučaju kad je $k = 1 + \frac{n-2}{2}$, tj. $k = \frac{n}{2}$, imamo tzv. degeneraciju poligona na dužinu. (Vidi sliku 3. Tu je $A_1 = A_3 = \dots = A_{n-1}$, $A_2 = A_4 = \dots = A_n$.)

Dakle, i u slučaju kad je n paran ne može biti $k > \frac{n-2}{2}$.



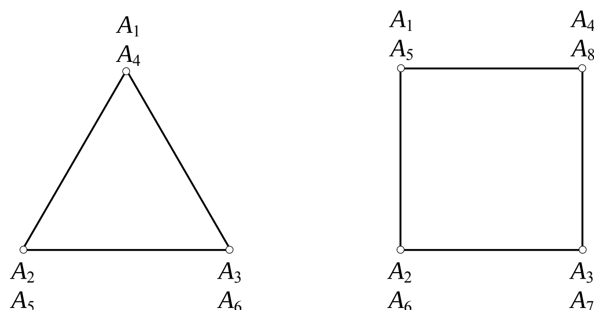
Slika 3.

Sada bi se moglo pomisliti da pravilnih n-terokuta, tj. pravilnih poligona s n stranica, ima $\frac{n-1}{2}$ u slučaju kad je n neparan, odnosno, $\frac{n-2}{2}$ kad je n paran. Ipak nije tako. Na primjer, "dvostruki" pravilni (jednakostraničan) trokut ne smatra se pravilnim šesterokutom, "dvostruki" pravilni četverokut (kvadrat) ne smatra se pravilnim osmerokutom, itd. Vidi sliku 4.

Da bismo to ispitali koristit ćemo neke nazive i činjenice koje se odnose na tzv. *relativno proste brojeve*. Kao što znamo, imamo *definiciju*:

Za dva prirodna broja a i b kaže se da su relativno prosti i piše $Nzm\ (a, b) = 1$ ako je najveća zajednička mjera brojeva a i b jednaka 1. Na primjer, broj 1 je relativno prost sa svakim prirodnim brojem; broj 2 je relativno prost sa svakim neparnim prirodnim

brojem. Ako je p prost broj, onda je on relativno prost sa svakim prirodnim brojem koji je manji od p. Tako je, na primjer, broj 7 relativno prost sa svakim od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6; broj 8 je relativno prost samo s brojevima 1, 3, 5, 7.



Slika 4.

Dokazat ćemo da vrijedi ovaj teorem.

Teorem 2. *Neka je $n \geqslant 3$ bilo koji zadani prirodni broj i neka je s W označen broj svih pravilnih n-terokuta koji nisu višestruki poligoni s manje od n vrhova.*
Tada u slučaju kad je n neparan imamo

W = broj svih onih prirodnih brojeva iz skupa $\left\{1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$ koji su relativno prosti s brojem n.
U slučaju kad je n paran imamo

W = broj svih onih prirodnih brojeva iz skupa $\left\{1, 2, \ldots, \frac{n-2}{2}\right\}$ koji su relativno prosti s brojem n.

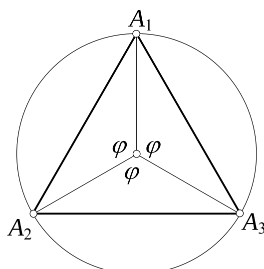
Dokaz. Pođimo od $n = 3$. Tu je $\frac{n-1}{2} = 1$ i broj 1 je relativno prost s brojem 3. Dakle, ako je $n = 3$, opisanost ne može biti veća od 1, pa imamo jednakost

$$m\sphericalangle A_1SA_2 + m\sphericalangle A_2SA_3 + m\sphericalangle A_3SA_1 = 1 \cdot 360^\circ$$

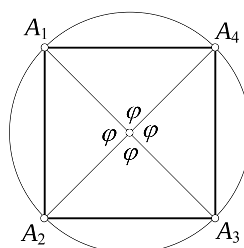
ili

$$\varphi + \varphi + \varphi = 360^\circ,$$

gdje je $\varphi = \frac{1 \cdot 360^\circ}{3} = 120^\circ$. Vidi sliku 5.



Slika 5.



Slika 6.

Slično vrijedi za $n = 4$, gdje je $\dfrac{n-2}{2} = 1$. Dakle, i za $n = 4$ ne može opisanost biti veća od 1, pa imamo jednakost

$$m\sphericalangle A_1SA_2 + m\sphericalangle A_2SA_3 + m\sphericalangle A_3SA_4 + m\sphericalangle A_4SA_1 = 1 \cdot 360^\circ$$

ili

$$\varphi + \varphi + \varphi + \varphi = 360^\circ,$$

gdje je $\varphi = \dfrac{1 \cdot 360^\circ}{4} = 90^\circ$. Vidi sliku 6.

Za $n = 5$ imamo skup $\{1, 2\}$ jer je $\dfrac{5-1}{2} = 2$. Tu imamo pravilni peterokut kojemu je opisanost 1 i pravilni peterokut kojemu je opisanost 2. Naime, tu imamo jednakost

$$m\sphericalangle A_1S_1A_2 + \ldots + m\sphericalangle A_5S_1A_1 = 1 \cdot 360^\circ,$$
$$m\sphericalangle B_1S_2B_2 + \ldots + m\sphericalangle B_5S_2B_1 = 2 \cdot 360^\circ,$$

ili

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_1 = 1 \cdot 360^\circ, \quad \varphi_2 + \ldots + \varphi_2 = 2 \cdot 360^\circ,$$

gdje je $\varphi_1 = \dfrac{1 \cdot 360^\circ}{5} = 72^\circ$, $\varphi_2 = \dfrac{2 \cdot 360^\circ}{5} = 144^\circ$. Vidi sliku 1.

I za $n = 6$ imamo skup $\{1, 2\}$ kao i za $n = 5$, jer je $\dfrac{6-2}{2} = 2$, ali ovdje broj 2 nije relativno prost s brojem 6. Za $k = 1$ imamo jednakost

$$m\sphericalangle A_1S_1A_2 + \ldots + m\sphericalangle A_6S_1A_1 = 1 \cdot 360^\circ,$$

ili

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_1 = 1 \cdot 360^\circ,$$

gdje je $\varphi_1 = \dfrac{1 \cdot 360}{6} = 60^\circ$.

Dakle, za $k = 1$ dobijemo pravilni šesterokut kojemu je opisanost l.

Za $k = 2$ imamo jednakost

$$m\sphericalangle B_1S_2B_2 + \ldots + m\sphericalangle B_6S_2B_1 = 2 \cdot 360^\circ$$

ili

$$\left(\frac{2 \cdot 360^\circ}{6} + \frac{2 \cdot 360^\circ}{6} + \frac{2 \cdot 360^\circ}{6}\right) + \left(\frac{2 \cdot 360^\circ}{6} + \frac{2 \cdot 360^\circ}{6} + \frac{2 \cdot 360^\circ}{6}\right) = 2 \cdot 360^\circ.$$

Budući da je $Nzm\ (2, 6) = 2$, gornju jednakost možemo pisati i u obliku

$$\left(\frac{360^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3}\right) + \left(\frac{360^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3}\right) = 2 \cdot 360^\circ$$

ili

$$(\varphi + \varphi + \varphi) + (\varphi + \varphi + \varphi) = 2 \cdot 360^\circ,$$

gdje je $\varphi = \dfrac{2 \cdot 360^\circ}{6} = 120^\circ$.

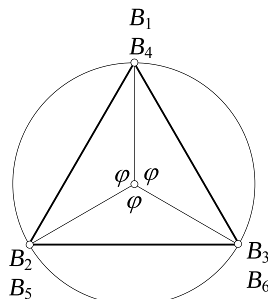
Vidi sliku 7. Ako se sumi $\varphi + \varphi + \varphi$ doda suma $\varphi + \varphi + \varphi$ opet se dobije isti pravilni trokut.

Uzmimo sada općenito da je $n \geqslant 3$ bilo koji zadani prirodni broj i da je k bilo koji zadani prirodni broj koji pripada skupu $\left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right\}$ ako je n neparan ili skupu $\left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-2}{2}\right\}$ ako je n paran. Ako je $Nzm(k, n) = 1$ imamo pravilni poligon $A_1 \ldots A_n$ za koji vrijedi jednakost

$$m\measuredangle A_1S_1A_2 + \ldots + m\measuredangle A_nS_1A_1 = k \cdot 360^\circ$$

ili

$$\frac{k \cdot 360^\circ}{n} + \ldots + \frac{k \cdot 360^\circ}{n} = k \cdot 360^\circ.$$



Slika 7.

U tom slučaju poligon $A_1 \ldots A_n$ ima k opisanost.

Ako je $Nzm(k, n) = d$, gdje je $d > 1$, imamo poligon $B_1 \ldots B_n$ za koji vrijedi jednakost

$$\frac{k \cdot 360^\circ}{n} + \ldots + \frac{k \cdot 360^\circ}{n} = k \cdot 360^\circ.$$

Ta se jednakost može pisati u obliku

$$\frac{h \cdot 360^\circ}{m} + \ldots + \frac{h \cdot 360^\circ}{m} = k \cdot 360^\circ,$$

gdje je

$$h = \frac{k}{d}, \quad m = \frac{n}{d},$$

tj. razlomak $\frac{h}{m}$ je dobiven skraćivanjem razlomka $\frac{k}{n}$ brojem (mjerom) d.

Dobivena jednakost može se pisati i u obliku

$$\left(\frac{h \cdot 360^\circ}{m} + \ldots + \frac{h \cdot 360^\circ}{m}\right) + \ldots + \left(\frac{h \cdot 360^\circ}{m} + \ldots + \frac{h \cdot 360^\circ}{m}\right) = k \cdot 360^\circ$$

ili

$$(h \cdot 360^\circ) + \ldots + (h \cdot 360^\circ) = k \cdot 360^\circ,$$

gdje pribrojnika $(h \cdot 360^\circ)$ ima d, jer je $dm = n$.

Dakle, poligon $B_1 \ldots B_n$ je u stvari poligon $B_1 \ldots B_m$ (s m vrhova) koji ima višestrukost d, tj. ispisuje se d puta. Tako je, na primjer, poligon $B_1 \ldots B_6$ u slučaju kada je $n = 6$ i $k = 2$, u stvari dvostruki trokut prikazan na slici 7.

Time je teorem 2 dokazan.

Taj se teorem može nadopuniti koristeći *Eulerovu funkciju* φ, čija definicija glasi:

Definicija. Neka je n bilo koji zadani prirodni broj. Tada je $\varphi(n)$ broj svih prirodnih brojeva koji su manji od n i relativno prosti s n.

Primjer. $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$.

Teorem 3. *Neka je $n \geqslant 3$ bilo koji zadani prirodni broj. Broj svih pravilnih poligona s n vrhova jednak je $\frac{\varphi(n)}{2}$.*

Dokaz. Da se dokaz ne bi učinio preteškim, najprije ćemo razmotriti dva primjera.

Uzmimo najprije da je n neparan broj, recimo $n = 9$. Tada je $\frac{n-1}{2} = 4$. Nije teško vidjeti da se u svakom od skupova $\{1, 2, 3, 4\}$ i $\{5, 6, 7, 8\}$ nalazi jednak broj prirodnih brojeva koji su relativno prosti s brojem 9. U prvom skupu to su brojevi 1, 2, 4, a u drugom 5, 7, 8. Za svaki broj k iz prvog skupa koji je relativno prost s brojem 9 dobije se broj $9 - k$ koji pripada drugom skupu i relativno je prost s 9. Tako su $9 - 1$, $9 - 2$, $9 - 4$ brojevi iz drugog skupa koji su relativno prosti s brojem 9.

Vrijedi i obratno, tj. za svaki broj l iz drugog skupa, koji je relativno prost s brojem 9, postoji broj $9 - l$ iz prvog skupa koji je relativno prost s brojem 9. Tako je $9 - 5$ broj iz prvog, a 5 broj iz drugog skupa.

Uzmimo sada da je n paran broj, recimo $n = 10$. Tada je $\frac{n-2}{2} = 4$, pa imamo skupove $\{1, 2, 3, 4\}$ i $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Možemo uočiti da između brojeva iz prvog skupa koji su relativno prosti s brojem 10 i brojeva iz drugog skupa koji su relativno prosti s brojem 10 postoji obostrano jednoznačno pridruživanje:

$$1 \to 10 - 1, \quad 3 \to 10 - 3,$$
$$9 \to 10 - 9, \quad 7 \to 10 - 7.$$

Dakle, da bismo dokazali teorem 3 dovoljno je dokazati da vrijede sljedeće dvije tvrdnje:

(1) U svakom od skupova

$$\{1, 2, \ldots, m\}, \quad \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m\},$$

kojima su elementi prirodni brojevi, ima jednak broj onih koji su relativno prosti s brojem $2m + 1$.

(2) U svakom od skupova

$$\{1, 2, \ldots, m\}, \quad \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m, 2m + 1\},$$

kojima su elementi prirodni brojevi, ima jednak broj onih koji su relativno prosti s brojem $2m + 2$.

Te se tvrdnje lako povezuju s prethodna dva primjera. Naime, prva tvrdnja se odnosi na neparni n i tu je $m = \frac{n-1}{2}$, a druga tvrdnja se odnosi na parni n i tu je $m = \frac{n-2}{2}$.

Za prvu tvrdnju dovoljno je pokazati da vrijedi ekvivalencija

$$Nzm(k, 2m + 1) = d \iff Nzm(2m + 1 - k, 2m + 1) = d.$$

A to je lako, jer iz

$$k = pd, \quad 2m + 1 = qd$$

slijedi jednakost

$$2m + 1 - k = (q - p)d.$$

Dakle svaka zajednička mjera od k i $2m + 1$ je i mjera od $2m + 1 - k$. I obrnuto vrijedi, jer iz

$$k = ad, \quad 2m + 1 - k = bd$$

$2m + 1 = (a + b)d$.

Dakle, svaka zajednička mjera od k i $2m + 1 - k$ je i mjera od $2m + 1$.

Na isti način može se zaključiti da vrijedi i druga tvrdnja koja se odnosi na parni n.

Preporučujemo učenicima da obrate pozornost na vježbe koje slijede.

Zadaci

1. Neka je $n = 8$. Nacrtaj pravilne osmerokute koji se dobiju za $k = 1$ i $k = 3$. Što se dobije za $k = 2$? Nacrtaj.

2. Neka je $n = 12$. Nacrtaj pravilne dvanaesterokute za $k = 1$ i $k = 5$. Što se dobije za $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$? Nacrtaj.

3. Neka je $n = 21$. Uvjeri se da se za $k = 6$ dobije dvostruki pravilni sedmerokut koji ima 2 opisanost. Što se dobije za $k = 9$?

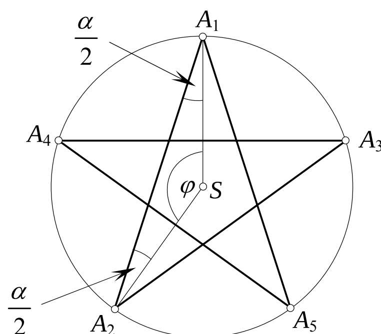
4. Zbroj kutova pravilnog poligona $A_1 \dots A_n$ koji ima opisanost k jednaka je

$$(n - 2k) \cdot 180^\circ.$$

Dokaži!

Uputa. Vidi sliku 8 za slučaj kada je $n = 5$ i $k = 2$. Vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} 5\alpha &= 5(180^\circ - \varphi) = 5 \cdot 180^\circ - 5\varphi \\ &= 5 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 360^\circ \quad (\text{jer je } \varphi = \frac{2 \cdot 360^\circ}{5}) \\ &= 5 \cdot 180^\circ - 4 \cdot 180^\circ \\ &= (5 - 4) \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$



Slika 8.

5. Ako je n neparan broj veći od 1, onda je $\frac{n-1}{2}$ relativno prosti s brojem n. Dokaži!

Uputa. Neka je m prirodan broj takav da je $n = 2m + 1$. Tada je $\frac{n-1}{2} = m$

6. Koliki je zbroj kutova pravilnog poligona $A_1 \dots A_n$ koji ima opisanost $\frac{n-1}{2}$?

7. Postoji li pravilni poligon $A_1 \dots A_n$ koji ima opisanost $\frac{n-2}{2}$ u slučaju kada je n paran broj? Navedi primjere ako postoji i primjere gdje ne postoji.

8. Koliki je zbroj kutova pravilnog poligona $A_1 \dots A_n$ koji ima opisanost $\frac{n-2}{2}$?

Pogovor

Dragi učenici,

vjerujemo da će ovaj članak biti zanimljiv svima vama koji volite matematiku i uživate u njenom otkrivanju i upoznavanju. Također, vjerujemo da će mnogi od vas izabrati studij matematike i biti naše kolege. Mi smo ponosni što studiramo matematiku, jer je to predmet koji se posebno cijeni u cijelome svijetu. Odavno se spoznalo da je svijet stvaran po zakonima matematike i da je matematika jezik kojim govori priroda. Zbog toga je već odavno matematika nazvana kraljicom znanosti.

Želimo vam puno uspjeha u vašem radu i odabiru studija.

Jensenova i kvadratna funkcijska jednadžba

Bojana Harambašić[1] *i Dijana Ilišević*[2], *Zagreb*

Funkcijske jednadžbe su, jednostavnim riječima, jednadžbe u kojima su nepoznanice funkcije. Ovdje sve nepoznate funkcije imaju domenu $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{C}$ i kodomenu $\mathbf{C}$, pri čemu skup $\mathcal{D}$ ima ova svojstva:

(i) $0 \in \mathcal{D}$,

(ii) $x, y \in \mathcal{D} \implies x + y \in \mathcal{D}$,

(iii) $x \in \mathcal{D} \implies -x \in \mathcal{D}$.

Primjerice, za $\mathcal{D}$ se mogu uzeti $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ ili $\mathbf{Z}$.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \quad \text{za sve} \ \ x, y \in \mathcal{D} \tag{1}$$

naziva se *Jensenova funkcija*, a funkcijska jednadžba (1) naziva se *Jensenova funkcijska jednadžba*. Ako domena $\mathcal{D}$ ima i svojstvo da $x \in \mathcal{D}$ povlači $\frac{1}{2}x \in \mathcal{D}$ (primjerice, ako se za $\mathcal{D}$ uzme $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ ili $\mathbf{Q}$), tada se Jensenova funkcijska jednadžba može zapisati i u ekvivalentnom obliku

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \text{za sve} \ \ x, y \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Naime, (2) se dobije iz (1) ako se tamo umjesto x stavi $\frac{1}{2}(x+y)$ i umjesto y, $\frac{1}{2}(x-y)$, a (1) se dobije iz (2) ako se u (2) umjesto x stavi $x+y$ i umjesto y stavi $x-y$.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad \text{za sve} \ \ x, y \in \mathcal{D} \tag{3}$$

naziva se *kvadratni funkcional*, a funkcijska jednadžba (3), *kvadratna funkcijska jednadžba*.

Za funkciju $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ kažemo da je *aditivna* ako je

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{za sve} \ \ x, y \in \mathcal{D}.$$

Uvrštavanjem $x = y = 0$ zaključujemo $f(0) = 0$.

Za funkciju $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ kažemo da je *biaditivna* ako je aditivna i u prvoj i u drugoj varijabli tj. ako je

$$g(x+y, z) = g(x, z) + g(y, z) \quad \text{i} \quad g(x, y+z) = g(x, y) + g(x, z)$$

za sve $x, y, z \in \mathcal{D}$, a *simetrična* ako je

$$g(y, x) = g(x, y) \quad \text{za sve} \ x, y \in \mathcal{D}.$$

Cilj nam je dokazati da se proučavanje Jensenove i kvadratne funkcijske jednadžbe (kao i nekih njima srodnih) svodi na proučavanje aditivnih i simetričnih biaditivnih funkcija.

Teorem 1. *Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija koja zadovoljava Jensenovu funkcijsku jednadžbu. Tada postoje jedinstvena aditivna funkcija $g : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ i jedinstven $c \in \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x) + c$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.*

Dokaz. Međusobnom zamjenom varijabli x i y u (1) dobije se

$$f(x+y) + f(y-x) = 2f(y) \quad \text{za sve} \ x, y \in \mathcal{D}. \tag{4}$$

[1] Apsolventica na PMF-Matematičkom odjelu u Zagrebu.

[2] Docentica na PMF-Matematičkom odjelu u Zagrebu.

Ako je f neparna funkcija, zbrajanjem (1) i (4), a zatim dijeljenjem s 2, zaključujemo da je f aditivna funkcija.

Ako je f parna funkcija, tada oduzimanjem (4) od (1) i dijeljenjem s 2 zaključujemo da je $f(x) = f(y)$ za sve $x, y \in \mathcal{D}$ tj. f je konstantna funkcija.

Neka je $g : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija definirana s $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ za svaki $x \in \mathcal{D}$, a $h : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija definirana s $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Tada funkcije g i h zadovoljavaju Jensenovu funkcijsku jednadžbu; g je neparna, a h parna i vrijedi $f(x) = g(x) + h(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Prema dokazanom, g je aditivna, a h konstantna funkcija (stoga postoji $c \in \mathbf{C}$ takav da je $h(x) = c$ za svaki $x \in \mathcal{D}$).

Preostaje dokazati da su takva funkcija g i takva konstanta c jedinstvene. Neka su aditivna funkcija $g_0 : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ i $c_0 \in \mathbf{C}$ takvi da je $f(x) = g_0(x) + c_0$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Tada je $g(x) - g_0(x) = c_0 - c$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Posebno za $x = 0$ imamo $c_0 - c = g(0) - g_0(0)$. No, g i g_0 su aditivne funkcije, pa je $g(0) = g_0(0) = 0$ i stoga $c_0 = c$. Slijedi $g(x) = g_0(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. $\square$

Teorem 2. *Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija koja zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu. Tada postoji jedinstvena simetrična biaditivna funkcija $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x,x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.*

Dokaz. Iz (3) se posebno za $y = 0$ dobije $f(0) = 0$, a za $y = x$, $f(2x) = 4f(x)$. Neka je $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija definirana s

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(f(x+y) - f(x) - f(y)) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}.$$

Tada je $g(x,x) = \frac{1}{2}(f(2x) - 2f(x)) = f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Očigledno je $g(y,x) = g(x,y)$ za sve $x, y \in \mathcal{D}$. Nadalje, primjenom (3) nekoliko puta, imamo

$$\begin{aligned}
&4(g(x,z) + g(y,z)) \\
&\quad = 2(f(x+z) - f(x) - f(z) + f(y+z) - f(y) - f(z)) \\
&\quad = (2f(x+z) + 2f(y)) + (2f(x) + 2f(y+z)) - 4(f(x) + f(y) + f(z)) \\
&\quad = (f(x+y+z) + f(x-y+z)) + (f(x+y+z) + f(x-y-z)) - 4(f(x)+f(y)+f(z)) \\
&\quad = 2f(x+y+z) + (f(x-y+z) + f(x-y-z)) - 4(f(x) + f(y) + f(z)) \\
&\quad = 2f(x+y+z) + (2f(x-y) + 2f(z)) - 4(f(x) + f(y) + f(z)) \\
&\quad = 2(f(x+y+z) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y) - f(z)) \\
&\quad = 2(f(x+y+z) - f(x+y) - f(z)) \\
&\quad = 4g(x+y,z).
\end{aligned}$$

Dakle, $g(x+y,z) = g(x,z) + g(y,z)$ za sve $x, y, z \in \mathcal{D}$. Obzirom da je g simetrična funkcija, izravno slijedi $g(x, y+z) = g(x,y) + g(x,z)$ za sve $x, y, z \in \mathcal{D}$.

Neka je sada $g_0 : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ simetrična biaditivna funkcija sa svojstvom $f(x) = g_0(x,x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Tada je $g_0(x,x) = g(x,x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Uvrstimo li u tu jednadžbu $x+y$ umjesto x, nakon sređivanja (primjenjujući biaditivnost funkcija g i g_0) dolazimo do

$$g_0(x,y) + g_0(y,x) = g(x,y) + g(y,x) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}.$$

Obzirom da su i g i g_0 simetrične, dobivamo $g_0(x,y) = g(x,y)$ za sve $x, y \in \mathcal{D}$. Dakle, simetrična biaditivna funkcija $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x,x)$, za svaki $x \in \mathcal{D}$, je jedinstvena. $\square$

Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y) \quad \text{za sve} \quad x, y \in \mathcal{D}. \tag{5}$$

Ako jednadžbi (5) dodamo zahtjev da je f neparna, ona prelazi u Jensenovu, a uz dodatni zahtjev da je f parna, jednadžba (5) prelazi u kvadratnu funkcijsku jednadžbu. Poznavanje strukture rješenja Jensenove i kvadratne funkcijske jednadžbe omogućuje nam određivanje strukture rješenja funkcijske jednadžbe (5).

Teorem 3. *Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu* (5). *Tada postoji jedinstvena simetrična biaditivna funkcija $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ i jedinstvena aditivna funkcija $h : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x,x) + h(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.*

Dokaz. Ako je f neparna funkcija, ona zadovoljava Jensenovu funkcijsku jednadžbu, pa teorem 1 povlači egzistenciju aditivne funkcije $k : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ i konstante $c \in \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = k(x) + c$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Stavimo li $x = y = 0$ u (5), zaključujemo $f(0) = 0$. Kako je k aditivna, to je i $k(0) = 0$. Slijedi $c = 0$. Dakle, $f(x) = k(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$ i stoga je f aditivna funkcija.

Ako je f parna funkcija, tada zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu, pa teorem 2 povlači egzistenciju simetrične biaditivne funkcije $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x,x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

Definirajmo funkcije $f_1, f_2 : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ s $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ i $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Funkcije f_1 i f_2 zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (5), f_1 je neparna, a f_2 parna i $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Prema dokazanom, f_1 je aditivna te postoji simetrična biaditivna funkcija $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ takva da je $f_2(x) = g(x,x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Dovoljno je staviti $h(x) = f_1(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$, odakle dobivamo $f(x) = g(x,x) + h(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

Neka je funkcija $g_0 : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ simetrična i biaditivna, funkcija $h_0 : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ aditivna i $f(x) = g_0(x,x) + h_0(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Tada je

$$h(x) - h_0(x) = g_0(x,x) - g(x,x) \quad \text{za svaki } x \in \mathcal{D},$$

odakle se uvrštavanjem $x + y$ umjesto x i sređivanjem (koristeći aditivnost funkcija h, h_0 i biaditivnost funkcija g, g_0) dobije

$$g_0(x,y) + g_0(y,x) = g(x,y) + g(y,x) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}.$$

Kako su g i g_0 simetrične, slijedi $g_0(x,y) = g(x,y)$ za sve $x, y \in \mathcal{D}$. Stoga je i $h(x) = h_0(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Dobiveni prikaz funkcije f je, dakle, jedinstven. $\square$

Na kraju napomenimo da se, unatoč svojoj jednostavnosti, funkcijske jednadžbe, ovdje proučavane, pojavljuju (najčešće uz neke dodatne uvjete) u raznim područjima matematike koja nadilaze srednjoškolske okvire te su i danas predmet zanimanja brojnih matematičara.

Literatura

1 D. Ilišević, *Quadratic functionals on modules over $*$-rings*, Studia Sci. Math. Hungar. **42** (2005), 95–105.

2 Pl. Kannappan, *On quadratic functional equation*, Internat. J. Math. & Statist. Sci. **9** (2000), 35–60.

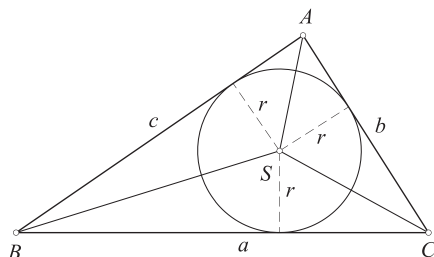
3 S. Kurepa, *The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. **19** (1964), 23–36.

Lijepa analogija

Mladen Halapa, Bjelovar

U članku se opisuje primjena metode analogije na sljedeći zadatak iz planimetrije i stereometrije:

- izračunati ploštinu trokuta, kojem znamo polumjer upisane kružnice r i opseg O,
- izračunati obujam piramide, kojoj su zadani polumjer upisane sfere r i oplošje O.



Neka je u trokut ABC upisana kružnica sa središtem S i polumjerom r. Spojimo vrhove A, B i C s točkom S i uočimo trokute ABS, BCS i CAS. Opseg trokuta ABC je

$$O = a + b + c.$$

Ploština trokuta ABC jednaka je zbroju ploština trokuta ABS, BCS i CAS:

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS} \\ &= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2} rO. \end{aligned}$$

Neka je u n-terostranu piramidu upisana sfera sa središtem S i polumjerom r. Obujam piramide iznosi

$$V = \frac{1}{3} Bv,$$

a oplošje

$$O = B + P = B + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n.$$

Kao što smo u prethodnom slučaju središte kružnice shvatili kao vrh pomoćnih trokuta, ovdje pretpostavimo da je središte sfere vrh svih pomoćnih piramida. Visine pomoćnih piramida jednake su polumjeru upisane sfere. Baze pomoćnih piramida su baza cijele piramide B i sve njezine pobočke P_1, P_2, P_3,..., P_n.

Obujam piramide jednak je zbroju obujama pomoćnih piramida:

$$\begin{aligned} V &= V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n, \\ V &= \frac{Br}{3} + \frac{P_1 r}{3} + \frac{P_2 r}{3} + \ldots + \frac{P_n r}{3} \\ &= \frac{r}{3}(B + P_1 + P_2 + \ldots + P_n) = \frac{1}{3} rO. \end{aligned} \qquad (1)$$

Primjer 1. Oko sfere promjera 20 opisana je piramida kojoj je obujam 200. Nađite oplošje piramide.

Rješenje.

$$V = \frac{1}{3}rO \implies O = \frac{3V}{r} = 60.$$

Primjer 2. Pravilnom oktaedru upisana je kugla polumjera 2. Koliki je njegov brid?

Rješenje. Budući da obujam pravilnog oktaedra brida a je

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

slijedi

$$V = \frac{1}{3}rO \implies \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}r \cdot 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \implies a\sqrt{2} = 2r\sqrt{3} \implies a = 2\sqrt{6}.$$

Primjer 3. Tetraedru brida a upisana je kugla polumjera r. Nađite omjer duljine brida a i polumjera r.

Rješenje. Iz formule za obujam tetraedra brida a:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

dobije se

$$V = \frac{1}{3}rO \implies \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}r \cdot 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \implies 3a\sqrt{2} = 12r\sqrt{3} \implies \frac{a}{r} = 2\sqrt{6}.$$

Primjer 4. U kocku brida a upisana je kugla polumjera r. Izvedite formulu, $V = a^3$, za obujam kocke pomoću (1).

Rješenje.

$$V = \frac{1}{3}rO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot 6a^2 = a^3.$$

Literatura

[1] Branko Topić, *Matematika za prijamne ispite*, Branko Topić, Varaždin, 2004.

[2] Pavković-Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

⋆ ⋆ ⋆

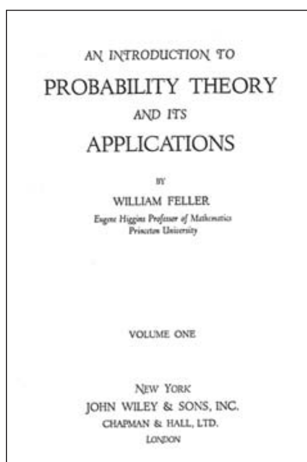
Svako malo trebamo otkrivati kotač, ne zato što trebamo puno kotača, već zato što moramo imati puno pronalazača.

Bruce Joyce

William Feller, Uvod u teoriju vjerojatnosti i primjene, (1)[1]

Maja Sekulić[2], *Zagreb*

Predgovor prvom izdanju


AN INTRODUCTION TO
PROBABILITY THEORY
AND ITS
APPLICATIONS
BY
WILLIAM FELLER
Eugene Higgins Professor of Mathematics
Princeton University

VOLUME ONE

NEW YORK
JOHN WILEY & SONS, INC.
CHAPMAN & HALL, LTD.
LONDON

Autorova prvotna namjera, bila je napisati knjigu o analitičkim metodama u teoriji vjerojatnosti, u kojoj bi se prema njima odnosilo kao prema predmetu čiste matematike. Takav način odnošenja bio bi uniformniji i stoga više zadovoljavajući s estetskog stajališta; također bi bio privlačniji "čistim" matematičarima. No, velikodušna potpora Ureda za pomorska istraživanja (Office of Naval Research) pri radu na teoriji vjerojatnosti na Sveučilištu Cornell, vodila je autora ambicioznijem i manje zahvalnom pothvatu zadovoljavanja raznovrsnih potreba.

Svrha je ove knjige strogo tretirati teoriju vjerojatnosti, kao zatvoreni matematički subjekt, izbjegavajući nematematička poimanja. Istovremeno, knjiga nastoji opisati iskustvenu pozadinu i razviti osjećaj za veliku raznolikost praktičnih primjena. Ta svrha je potpomognuta mnogim specijalnim problemima, numeričkim proračunima i primjerima koji prekidaju glavni tijek teksta. Oni su jasno odijeljeni izgledom zapisa i obrađeni slikovitijim jezikom, s manje formalnosti. Uključena je nekolicina posebnih tema, da bi se prikazala moć općenitih metoda i da bi se povećala korisnost knjige specijalistima u raznim područjima. Da bi se olakšalo čitanje, udaljavanja od glavne teme naznačena su zvjezdicama. Poznavanje činjenica, zvjezdicama označenih odjeljaka, nije nužno za razumijevanje ostatka.

Ostvareni su ozbiljni napori da bi se metode učinile jedinstvenima. Specijalist će pronaći mnoga pojednostavnjenja postojećih dokaza, ali i nove rezultate. Posebno, teorija ponavljajućih događaja, razvijena je za svrhe ove knjige. To vodi novom načinu ophođenja prema Markovljevim lancima, koji dopušta pojednostavnjenja, čak i u graničnim slučajevima.

---

[1] U broju 2/226 Matematičko-fizičkog lista pisali smo o svjetski poznatom matematičaru Vilimu Felleru. Njegove knjige, *Uvod u teoriju vjerojatnosti i primjene, I, II*, vrlo su poznate i prevedene na nekoliko stranih jezika (ruski, kineski, španjolski, poljski, mađarski – posljednje izdanje 2005. g.). Donosimo predgovor prvom izdanju prvog dijela i izvadke iz predgovora trećeg izdanja, kao i dio uvoda te knjige, u nadi da će se jednom cijela knjiga prevesti i na hrvatski jezik. Ujedno ovo je, jednostavnim rječnikom, uz mnoštvo primjera iz svakodnevnog života, ispričan uvod u vrlo važnu, zanimljivu i danas u matematici i primjenama neizostavnu teoriju vjerojatnosti.

[2] Autorica je studentica Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Kao seminarski rad (voditelj prof. dr. sc. Darko Žubrinić) prevela je uvodni dio trećeg izdanja knjige Williama Fellera, An Intrroduction to Probability Theory and Its Applications, 1968. e-mail: Maja.Sekulic@fer.hr

Primjeri su popraćeni s otprilike 340 problemskih zadataka, većinom s potpunim postupcima rješavanja. Neki od njih su samo jednostavne vježbe, ali većina ih služi kao dodatni pokazni materijal za tekst, ili pak sadrže razne dopune. Cilj je primjera i problemskih zadataka, razviti u čitatelja intuiciju i umijeće formuliranja vjerojatnosnih objekata. Nakon što se prođe kroz nekoliko primjera, pokaže se, da naizgled teški problemi mogu postati gotovo banalni, kad se formuliraju na prirodan način i stave u odgovarajući kontekst.

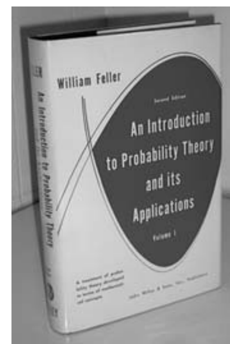
U podučavanju se nastoji, što je prije moguće, svesti probleme vjerojatnosti na čistu analizu, i zaboraviti specifičnosti teorije vjerojatnosti kao takve. Takvi načini ophođenja temelje se na slabo definiranim idejama slučajnih varijabla, obično uvedenih na početku. Ova knjiga ide do drugog ekstrema i zadržava se na ideji prostora elementarnih događaja, bez kojeg slučajne varijable ostaju patvorene.

U cilju predstavljanja istinske pozadine, oslobođene pitanja mjerljivosti i drugih čisto analitičkih poteškoća, ova knjiga se ograničava na diskretni *prostor elementarnih događaja*. Ovo ograničenje je iznimno strogo, ali bi trebalo dobro doći nematematičkim korisnicima. Ono dopušta uključivanje posebnih tema, koje se ne mogu lako pronaći u literaturi. Istovremeno, ovakvo opredjeljenje omogućuje da se započne na jednostavan način, a da se uključi prilično iscrpno bavljenje takvim naprednim temama, kao što su rasipanja uzoraka i Markovljevi lanci. Opća teorija slučajnih varijabla i njihovih razdioba, granični teoremi, teorija difuzije, itd., ostavljeni su predstojećim knjigama. Ova knjiga ne bi bila napisana bez potpore Ureda za pomorska istraživanja. Jedna od posljedica ove potpore je prilično redoviti kontakt s J. L. Doobom, čiji su stalni kriticizam i ohrabrivanja, bili neprocjenjivi. Prije svih, zahvale upućujem njemu. Sljedeće zahvale za pomoć dugujem Johnu Riordanu, koji je pratio rukopis kroz dvije verzije. Određeni broj ispravaka i poboljšanja predložila je moja supruga koja je čitala i rukopis i otisnutu verziju.

Autor također mnogo duguje K. L. Chungu, M. Donskeru, i S. Goldbergu, koji su pročitali rukopis i ispravili razne greške; većinu rješenja za probleme pripremio je S. Goldberg. Naposljetku, zahvale dugujem Kathryn Hollenbach za strpljivu i stručnu pomoć pri prijepisu, te E. Elyashu, W. Hoffmanu i J. R. Kinneyu za pomoć u lektoriranju.

William Feller, Cornell University, siječanj, 1950.

Izvadci iz pregovora trećem izdanju



Kad sam započeo pisanje ove knjige (pred više od 25 godina) samo je nekolicina matematičara van Sovjetskog saveza prepoznala vjerojatnost kao legitimnu granu matematike. Opseg primjena bio je ograničen, a razmatranje pojedinih primjera često je vodilo nevjerojatnim komplikacijama. Pod tim okolnostima knjiga nije mogla biti pisana za postojeće čitatelje, niti da zadovolji potrebe onih osviještenih. Pisana je u nadi da će privući pozornost na manje znana stajališta vjerojatnosti, da učvrsti poveznice među različitim područjima, da razvije jedinstvene metode, i ukaže na moguće primjene. Zbog rastućeg zanimanja za vjerojatnost, knjiga je pronašla neočekivano mnogo korisnika van disciplina matematike. Njena široka upotreba bila je razumljiva dok god je stajalište koje je pronosila bilo novo i dok materijali, koje je sadržavala, nisu bili drugačije dostupni. No izgleda da je njena popularnost opstala čak i sada, kada su sadržaji većine poglavlja dostupni kroz

specijalizirana ostvarenja usmjerena određenim potrebama. Iz tog razloga, bit knjige u novom izdanju ostaje nepromijenjena. Nadam će da će nastaviti služiti različitim potrebama, i posebice, da će nastaviti pronalaziti čitatelje koji je pretežito čitaju zbog užitka i osviještenja.

Kroz godine, zahvalno sam primao mnoge povratne informacije korisnika, što je vodilo ka razno-raznim poboljšanjima. Mnogi odjeljci su ponovno napisani da bi se olakšalo proučavanje. Čitljivost je, također poboljšana prikladnijim ispisom i nadležnim lektorskim radom gospođe H. McDougal, koja je, iako profesionalna urednica, sačuvala osjećaj za potrebe čitatelja i cjelokupnu svrhu.. . .

Kroz određeni broj godina imao sam privilegiju raditi sa studentima i mlađim kolegama, čijoj pomoći i inspiriranjima mnogo dugujem. Veliko priznanje za ovo dugujem potpori Američkog ureda za vojna istraživanja (U.S. Army Research Office) za rad na teoriji vjerojatnosti na Sveučilištu Princeton. Izrazite zahvale upućujem Jayu Goldmanu za njegova obzirna sjećanja o iskustvima u podučavanju, i Lorenu Pittu za predanu pomoć oko nekih dokaza.

William Feller, srpanj, 1967.

⋆ ⋆ ⋆

Uvod

Priroda teorije vjerojatnosti

1. Okružje



Vjerojatnost je matematička disciplina s ciljevima sličnim onima u, na primjer, geometriji ili analitičkoj mehanici. U svakom znanstvenom području moramo pažljivo razlikovati tri aspekta teorije: (*a*) formalni logički sadržaj, (*b*) intuitivnu pozadinu, (*c*) primjene. Narav i čar cjelokupne strukture, ne može se cijeniti bez usklađivanja sva tri aspekta u njihovoj ispravnoj povezanosti.

(a) Formalni logički sadržaj

Načelno, matematika se odnosi samo na odnose među nedefiniranim stvarima. Ovakvo gledište slikovito prikazuje igra šaha. Nemoguće je "definirati" šah drugačije nego kroz niz pravila. Uobičajen oblik figura donekle može biti opisan, ali nije baš uvijek jasno za koju se figuru podrazumijeva da je "kralj". Šahovska ploča i figure su od pomoći, ali možemo ih se osloboditi. Ono što je važno znati, jest kako se figure kreću i ponašaju. Nema smisla govoriti o "definiciji" ili "pravoj prirodi" pješaka ili kralja. Slično, geometrija ne brine što "su zapravo" točke i pravci. Oni ostaju nedefinirane zabilješke, a aksiomi geometrije određuju odnose među njima: dvije točke određuju pravac, itd. Ovo su pravila, i nema ništa uzvišeno u njima. Različiti oblici geometrije temelje se na različitim skupovima aksioma, i logička struktura neeuklidske geometrije neovisna je o njenom odnosu spram stvarnosti. Fizičari su promatrali kretanje tijela pod zakonima privlačenja različitim od Newtonovih, i ove studije su značajne, čak i ako je Newtonov zakon gravitacije prihvaćen kao istinski prirodni zakon.

(b) Intuitivna pozadina

Suprotno šahu, aksiomi geometrije i mehanike imaju intuitivnu pozadinu. Zapravo, geometrijska intuicija je tako jaka da je sklona uzmicanju pred logičkim zaključivanjem. Razmjer do kojeg su logika, intuicija i fizikalno iskustvo međuovisni, problem je u koji ne trebamo ulaziti. Sigurno je da se intuicija može izvježbati i razviti. Zbunjeni novak u šahu vuče poteze oprezno, opoziva individualna pravila, dok iskusan igrač usvaja komplicirane situacije letimično i ne može racionalno procijeniti svoju intuiciju. Na sličan način matematička se intuicija povećava iskustvom i moguće je razviti prirodan osjećaj za pojmove kao što je četverodimenzionalni prostor.

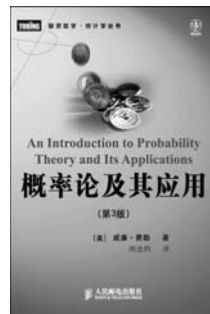
Čak se čini, da i kolektivna intuicija čovječanstva napreduje. Newtonovo mišljenje o polju sile i djelovanja na daljinu i Maxvellov koncept elektromagnetskih valova najprije su opisani kao "nezamislivi" i "suprotni intuiciji". Moderna tehnologija i radio u kućama popularizirali su ove zamisli do takvih razmjera da sada čine dio svakodnevnog rječnika. Slično tome, suvremeni student nema procjenu načina mišljenja, predrasuda i drugih teškoća protiv kojih se teorija vjerojatnosti morala boriti kad je bila nova. Današnji tisak iznosi primjere javnog mišljenja i čarobnost statistike obuhvatila je sve faze života, pa čak i mlade djevojke statistički razmatraju svoje šanse za udaju. Tako je svatko razvio osjećaj značenja za tvrdnje tipa: "šanse su tri naprama pet". Neodređena kakva već jest, ova intuicija služi kao pozadina i vodič za prvi korak. Razvit će se, a kako teorija napreduje i namirenje se postiže s više sofisticiranih primjena.

(c) Primjene

Shvaćanje geometrije i mehanike u praksi je poistovjećeno s određenim fizičkim objektima, ali proces je tako rastezljiv i promjenjiv da se ne mogu postaviti opća pravila. Opis čvrstog tijela je temeljan i koristan, iako niti jedan fizički objekt nije u potpunosti čvrst. Kad će neko tijelo biti tretirano kao kruto ovisi o okolnostima i željenom stupnju aproksimacije. Guma zasigurno nije čvrsta, ali u raspravi o kretanju automobila na ledu udžbenici tretiraju automobilske gume kao kruta tijela. Ovisno o namjeni teorije, zanemarujemo atomsku strukturu tvari i tretiramo Sunce, sad kao loptu neprekinute mase, sad kao jednu materijalnu točku. U primjeni, apstraktni matematički modeli služe kao alati, i različiti modeli mogu opisati neke empirijske situacije. *Način na koji se primjenjuju matematičke teorije, ne ovisi o predodređenim idejama; to su tehnike s namjerom da ovise o, i mijenjaju se, s iskustvom.* Filozofska analiza ovih tehnika je odobreno polje znanstvenih proučavanja, ali nije unutar oblasti matematike, fizike ili statistike. Filozofija postavljanja temelja vjerojatnosti mora biti odvojena od matematike i statistike, točno kao što je naša rasprava o konceptu intuitivnog prostora odvojena od geometrije.

2. Postupak

Povijest vjerojatnosti (i matematike uopće) pokazuje stimulirajuću međuigru teorije i primjene; napredak teorije otvara novo polje primjene i povratno, primjena vodi do novih problema i plodonosnih rješenja. Teorija vjerojatnosti sad je primjenjiva na mnogim različitim poljima i prilagodljivost opće teorije je potrebna da omogući odgovarajuće alate za tako velike i različite potrebe. Moramo se oduprijeti iskušenju (i pritisku) da gradimo teoriju, njenu terminologiju i njen arsenal preblizu određenoj interesnoj sferi. Umjesto toga, želimo razviti matematičku teoriju, na način koji se pokazao toliko uspješnim u geometriji i mehanici.



Početćemo od najjednostavnijeg iskustva, kao što je bacanje novčića ili bacanje kocke, gdje sve izjave imaju očito intuitivno značenje. Ova intuicija će se prevesti u apstraktni model koji će biti uopćen postepeno i po stupnjevima. Bit će prikazani ilustrativni primjeri da bi se objasnila iskustvena pozadina nekoliko obrazaca i da bi se razvila čitateljeva intuicija, ali će teorija sama po sebi biti matematičke naravi. Nećemo više pokušavati objasniti "pravo značenje" vjerojatnosti već kako se moderni fizičar može zadržati na "pravom značenju" mase i energije, ili geometar raspravljati o prirodi točke. Umjesto toga, dokazat ćemo teoreme i prikazati kako se primjenjuju.

Povijesno, originalna namjena teorije vjerojatnosti je bila opisati preusku domenu iskustva prikupljenog u igrama na sreću i glavni napor bio je usmjeren izračunu određenih vjerojatnosti. U uvodnim poglavljima, također ćemo izračunati nekoliko tipičnih mogućnosti, ali treba imati na umu da brojčana vrijednost nije glavni predmet teorije. Njen je cilj pronaći opće zakone i oformiti zadovoljavajuće teorijske modele.

Vjerojatnosti za nas imaju istu ulogu kao i mase u mehanici. O kretanju planetarnih sustava može se raspravljati bez znanja o pojedinačnim masama i bez smišljenih metoda za njihovo stvarno mjerenje. Čak i modeli nepostojećih planetarnih sustava mogu biti objekt profitabilnih i prosvjećujućih studija. Slično, praktični i *korisni modeli vjerojatnosti mogu ukazivati na svjetove koje ne možemo izravno izučavati*. Na primjer, milijarde dolara su uložene u automatske telefonske centrale. One su temeljene na jednostavnim vjerojatnosnim modelima u kojima su uspoređeni različiti mogući modeli. Stvoren je najbolji teoretski sistem i drugi nikad nisu zaživjeli. U osiguranju, teorija vjerojatnosti je uzeta za računanje vjerojatnosti uništenja; tj. teorija je korištena da se izbjegnu određene neželjene situacije i posljedično se primjenjuje za situacije koje nisu zapravo primijećene. Teorija vjerojatnosti bit će djelotvorna i korisna, čak i ako niti jedan numerički podatak nije dostupan.

3. "Statistička" vjerojatnost



Uspjeh suvremene matematičke teorije vjerojatnosti ima svoju cijenu: teorija je ograničena na jedan određeni aspekt "prilike". Intuitivno poimanje vjerojatnosti je povezano s induktivnim razmišljanjima i s prosudbama kao "Pavle je vjerojatno sretan čovjek," "Ova će knjiga vjerojatno podbaciti," "Fermatova pretpostavka je vjerojatno pogrešna." Pretpostavke ove vrste interesantne su filozofima i onima koji se bave logikom i one su prihvaćeni objekt matematičke teorije.[3] Mora se razumjeti da nas ne zanimaju oblici induktivnog razmišljanja nego nešto što se naziva stvarna ili *statistička vjerojatnost*. Grubo rečeno, možemo okarakterizirati ovaj pojam govoreći da naša vjerojatnost ne podliježe procjeni, nego mogućim ishodima *konceptualnog eksperimenta*. Prije nego što počnemo govoriti o vjerojatnosti, moramo se dogovoriti o idealnom modelu posebnog konceptualnog eksperimenta, kao što je bacanje novčića, uzorkovanje klokana na mjesečini, promatranje čestica tijekom difuzije, brojanje telefonskih poziva. Naposljetku, moramo se dogovoriti o mogućim ishodima tog eksperimenta (*naš prostor elementarnog događaja*) i njemu pridruženim

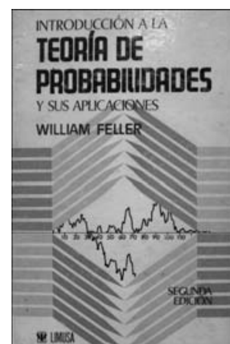
[3] B. O. Koopman, *The axioms and algebra of intuitive probability*, Ann. of Math. (2), vol. 41 (1940), pp. 269–292, i *The bases of probability*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 46 (1940), pp. 763–774.)

Za suvremeni tekst temeljen na subjektivnim vjerojatnostima, vidi L. J. Savage, *The fundations of statistics*, New York (John Wiley) 1954.

vjerojatnostima. Ovo je analogno postupku u mehanici, kad zamišljeni modeli uključuju prikaze dvije, tri ili sedamnaest materijalnih točaka, koje su odriješene individualnih osobina. Slično, analizom igre bacanja novčića nismo zaokupljeni slučajnim okolnostima dotičnog pokusa: objekt naše teorije je slijed (ili raspored) simbola kao što je "glava, glava, pismo, glava, ..." U našem sustavu nema mjesta za nagađanja vezanih uz vjerojatnost da će sutra izaći Sunce. Prije govora o tome, trebamo se dogovoriti o (idealiziranom) modelu koji će se pretpostavljivo povlačiti kroz redove "od beskonačno mnogo riječi jedna je odabrana nasumce." Nije potrebno puno mašte, da bi se zamislio ovakav model, no on se pokazuje istovremeno nezanimljivim i besmislenim.

Astronom govori o mjerenju temperature u središtu Sunca ili putovanju na Sirius. Ove radnje čine se nemogućima, a ipak nije nerazumno razmatrati ih. Na isti način, nećemo brinuti o tome može li se ili ne može naš zamišljeni eksperiment izvesti; analizirat ćemo apstraktni model. U pozadini naših misli zadržat ćemo intuitivnu interpretaciju vjerojatnosti koja postiže operativni značaj u određenim primjenama. *Zamislimo* pokus ponovljen mnogo puta. Za očekivati je da će se događaj s vjerojatnošću 0.6, ako se pokus višestruko ponavlja, pojaviti u 60 od 100 ponavljanja. Ovaj opis je namjerno neodređen ali slikovito prikazuje intuitivnu pozadinu dovoljnu za više osnovnih primjena. Kako teorija sve više napreduje i pomnije raste, operativni značaj i intuitivna slika postaju sve stvarniji.

4. Sažetak



Zainteresirani smo za teorijske modele u koje vjerojatnosti ulaze kao slobodni parametri, na prilično sličan način kao i mase u mehanici. Primjenjive su na mnoge i različite načine. Tehnike primjene i intuicija razvijaju se s teorijom.

Ovo je standardni način prihvaćen i plodonosan u drugim matematičkim disciplinama. Nije smišljen drugi način koji bi shvatljivo popunio mnogostruke potrebe i zahtjeve *svih* grana rastućeg entiteta zvanog teorija vjerojatnosti i njene primjene.

Možemo pravedno kukati da intuitivna vjerojatnost nije dovoljna za znanstvenu primjenu, ali ona je povijesna činjenica. U primjeru I, (6.*b*), razmotrit ćemo slučajnu raspodjelu čestica u odjeljcima. Odgovarajuća, ili "prirodna", razdioba vjerojatnosti, čini se svakome savršeno jasna i prihvatljiva, i bez oklijevanja je prihvaćena od strane fizičara. Međutim, ispada da se fizikalne čestice ne ponašaju u skladu s ljudskim razumom i "prirodna" (ili Boltzmannova) raspodjela će u nekim slučajevima prijeći u Einstein-Boseovu raspodjelu, a u drugim slučajevima Fermi-Diracovu raspodjelu. Nikakav intuitivni dokaz nije ponuđen zašto bi se fotoni ponašali različito od protona i zašto se ne pokoravaju "a priori" zakonima. *Ako* sad možemo naći opravdanje, ono će samo pokazati da se intuicija razvija s teorijom. Svakako, kad su sloboda i prilagodljivost bitne za primjenu, bilo bi pogubno okovati teoriju za pričvršćene polove.

Tvrdi se, također, da je moderna teorija vjerojatnosti previše apstraktna i previše općenita da bi bila uporabljiva. To je borbeni poklik ljudi, okrenutih praktičnim primjenama, protiv Maxwellove teorije polja. Tvrdnja se može obrnuti ukazivanjem na neočekivanu primjenu otvorenu apstraktnom teorijom stohastičkog procesa, ili, novim uvidima ponuđenim od strane moderne teorije fluktuacije koja više vjeruje intuiciji i vodi reviziji praktičnih stavova. Kako bilo, rasprava je nekorisna; prelako je osuditi

nešto kao neprimjereno za upotrebu. Jučer, današnje su praktične stvari prezrene kao nepraktične, a teorije koje će sutra biti praktične uvijek će biti označene kao bezvrijedne igrice praktičnog čovjeka današnjice.

5. Povijesna bilješka

Statistički, ili iskustveni, stav prema vjerojatnosti uglavnom su razvili R. A. Fisher i R. von Mises. Pojam prostora elementarnih događaja[4] dolazi od Misesa. Ova ideja omogućila je izradu strogo matematičke teorije vjerojatnosti temeljene na teoriji mjerenja. Ovakav pristup pojavljuje se postepeno u dvadesetim godinama pod utjecajem mnogih autora. Aksiomatski pristup predstavlja suvremeni razvoj prema A. Kolmogorovu.[5] Slijedit ćemo ovu liniju, premda je izraz aksiom preuzvišen, s obzirom da se trenutni volumen bavi jedino jednostavnim slučajevima diskretne vjerojatnosti.

⋆ ⋆ ⋆

Kalendar natjecanja u matematici za učenike srednjih škola 2008. g.

— *Školska natjecanja*	— *25. siječnja*
— *Županijska natjecanja*	— *7. ožujka*
— *"Klokan bez granica"*	— *20. ožujka*
— *Državno natjecanje*	— *od 6. do 9. travnja*
— *Mediteransko matematičko natjecanje*	— *10. i 11. svibnja*
— *Regionalna natjecanja*	— *16. svibnja*
— *Međunarodna matematička olimpijada*	— *od 10. do 22. srpnja*
— *Srednjoeuropska matematička olimpijada (MEMO)*	— *4. do 10. rujna*

[4] Izvorna njemačka riječ je *Merkmalraum* (prostor obilježja). Von Misesova se temeljna rasprava *Wahrscheinlichkeitsrechnung* pojavila 1931. godine. Modernija verzija (prepravljena i nadopunjena od strane Hilde Geiringer) pojavila se 1964. pod naslovom *Mathematical theory of probability and statistics*, New York (Academic Press). Von Misesove filozofske ideje najbolje su znane iz ranijeg pamfleta iz 1928., kojeg je revidirao H. Geiringer: *Probability, statistics and truth*, London (Macmillan), 1957.

[5] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin (Springer) 1933. Engleski prijevod (N. Morrisona) pojavio se 1956: *Fundations of the theory of probability*, New York (Chelsea).

Popis matematičkih pojmova koji nose Fellerovo ime

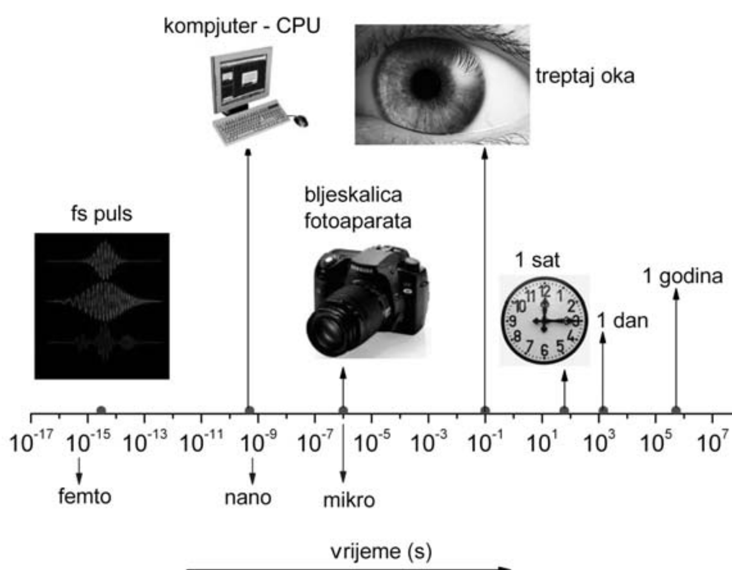
1. Feller theory
2. Feller process
3. Feller minimal process
4. strong Feller process
5. doubly Feller process
6. Feller property
7. strong Feller's property
8. weak Feller's property
9. Feller class
10. Feller chain
11. Feller-McKean chain
12. Feller-Markov chains
13. Quasi-Feller Markov chains
14. Feller extension
15. Feller's decomposition
16. Feller's road map
17. Feller diffusion process
18. two-parameter Feller process
19. Doubly-Feller process
20. Feller branching diffusion
21. Feller transition function
22. Feller's representation
23. Feller's construction
24. Feller transition probabilities
25. Feller-Reuter-Riley (FRR) property
26. Feller-Reuter-Riley transition function
27. Feller continuity
28. Feller semigroup
29. Feller-Dynkin semigroup
30. Feller-Dynkin diffusion
31. Feller-Dynkin process
32. Feller-Dynkin propagators
33. Feller-Dynkin characterizations
34. Feller generator
35. Feller local generator
36. Feller's transformation
37. Feller's randomization technique
38. Chung-Feller theorem
39. Feller-Lindvall diffusion
40. Feller-Lamperti-Lindvall invariance principle
41. Feller-Pareto distribution
42. Feller data
43. Feller's parametric equations
44. Feller operator
45. sub-Feller operator
46. discrete Feller operator
47. selfadjoint Feller operators
48. Feller kernel
49. Feller stochastic kernel
50. quasi-Feller kernels
51. Feller approximation
52. Feller perturbation
53. Feller resolvent
54. Feller minimal resolvent
55. Feller boundary
56. Feller's natural boundaries
57. Feller classification
58. Feller boundary classification
59. Feller-Wentzell-type boundary conditions
60. Feller-Ventcel' end conditions
61. Feller-Ueno boundary decomposition
62. Feller's domainated variation
63. Feller alternatives
64. Dirichlet-Feller operator
65. Trotter-Feller operator
66. Feller potential
67. Riesz-Feller potential
68. Riesz Feller derivative
69. Kato-Feller (Feller-Kato) potential
70. Kato-Feller class
71. Kato-Feller norm
72. Kato-Feller property
73. Trotter-Feller operator
74. Keldysh-Feller operator
75. Keldysh-Feller conditions
76. Feller Brownian motions
77. co-Feller operator
78. co-Feller Markov chain
79. stochastic compactness in Feller's sense
80. Feller's test for explosions
81. Lindeberg-Feller condition
82. generalized Feller condition
83. Feller-Lindeberg central limit theorem
84. Bernstein-Feller central limit theorem
85. Feller-Khintchine-Lévy central limit theorem
86. Feller's renewal theorem
87. Blackwell-Feller-Orey renewal theorem
88. Feller's theory of recurrent events
89. Feller's recurrent events
90. Feller's discrete time recurrent phenomena
91. concept of Feller-Gantos
92. Feller-Jirina-Lamperti convergence
93. Erdös-Feller-Pollard theorem
94. Feller's paradox
95. Chernoff-Feller-Klotz-Stone-Sievers approach
96. Aleksandrov-Busemann-Feller theorem
97. Busemann-Feller-Aleksandrov theorem
98. Busemann-Feller (BF) basis
99. Feller measures
100. Feller invariant measure
101. Feller system
102. Feller-Arley process (model)
103. Feller-Arley birth and death process
104. Feller minimal birth-death process
105. Feller minimal solutions
106. Feller's solution
107. Non-Feller model
108. Quasi-Feller model
109. Feller's coupling method
110. Dickey-Feller test
111. Lévy-Feller process
112. Lévy-Feller diffusion
113. Lévy-Feller advection-dispersion process
114. Markov-Feller (Feller-Markov) process
115. Markov-Feller semigroup
116. Markov-Feller (Feller-Markov) operators
117. Markov-Feller pair
118. Feller semi-Markov control processes
119. Krein-Feller operators
120. indefinite Krein-Feller differential operators
121. Krein-Feller (eigenvalue) problem
122. Krein-Feller second order derivative
123. Feller-Miyadera-Phillips theorem
124. Hille-Phillips-Feller-Miyadera conditions
125. Hille-Yosida-Feller-Phillips-Miyadera semigroup
126. Hille-Yosida-Feller theorem
127. Feller's Canonical Scale
128. Feller's Canonical Measure
129. Feller's Canonical Form
130. Feller cocycle
131. Feller-Jirina theorem
132. Feller-Jirina scheme
133. Feller-Tornier constant
134. Generalized Feller equation
135. Feller solutions to SPDE's
136. Feller's law of the iterated logarithm
137. Feller-Erdös-Kolmogorov-Petrovski criterion
138. Petrovskii-Erdös-Feller integral functional
139. Feller-Fokker-Planck equation
140. Fokker-Planck-Kolmogorov-Feller equation
141. Kolmogorov-Feller test
142. Kolmogorov-Erdös-Feller integral tests
143. KolmogorovàFeller weak law of large numbers
144. Kolmogorov-Feller (Feller-Kolmogorov) equation
145. Kolmogorov-Feller integro-differential equation
146. Kolmogorov-Feller-Stratonovich equation
147. Kolmogorov-Feller theory of Markov processes
148. Kolmogorov-Feller jump processes
149. Kolmogorov-Feller-type operator

Više o tome vidi na adresi `www.croatianhistory.net/etf/feller/html`

Femtosekundni laseri – preciznost u vremenu i frekvenciji

Ticijana Ban[1], *Zagreb*

Mjerenje vremena trajanja prirodnih pojava jedno je od najstarijih područja znanstvenih istraživanja. Težnja da se mjere procesi koji se odvijaju na sve kraćim i kraćim vremenskim skalama osnovna je motivacija široke znanstvene zajednice. Promatrajući vremensku crtu prikazanu na slici 1, vidimo da nas pomaci prema sve kraćim i kraćim vremenima vode izvan dosega ljudskog iskustva. "Ultrabrza" znanost proučava procese koji se odvijaju na femtosekundnoj vremenskoj skali. A kako bismo iz našeg iskustvenog svijeta sekunde skočili u svijet femtosekunde prisjetimo se da je 1 fs (femtosekunda) $= 0.000000000000001$ s. Omjer 1 fs : 1 s jednak je omjeru 5 min : starosti Zemlje. Svjetlost, koja je elektromagnetski val i putuje najbržom mogućom brzinom, proputuje za vrijeme 1 fs put od svega 0.3 mikrometara $(1\ \mu\text{m} = 10^{-6}\ \text{m})$. Ova udaljenost dovodi nas u područje atomskih udaljenosti i tu već naslućujemo zašto nam je istraživanje u fs vremenskom području vrlo važno.

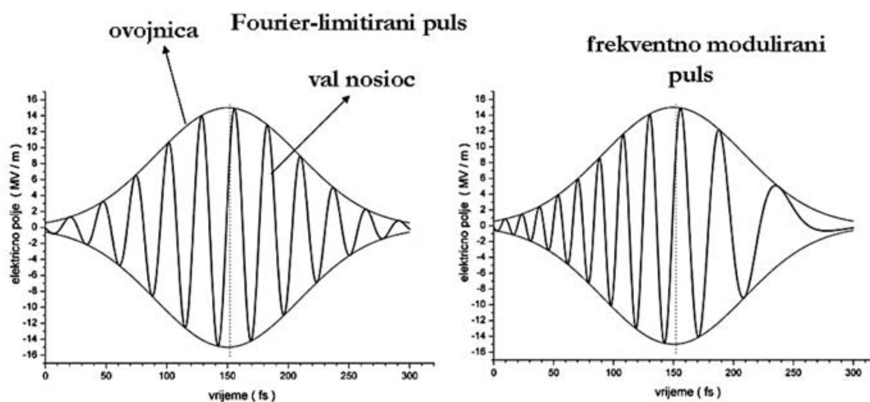


Slika 1. Vremenska crta.

[1] Autorica je viša znastvena suradnica u Laboratoriju za femtosekundnu lasersku spektroskopiju Instituta za fiziku u Zagrebu, `htpp://project2.ifs.hr`; `ticijana@ifs.hr`.

Već su 1930. teorijski računi Hirshfedera i Eyringa pokazali da se dinamika $H + H_2$ reakcije odvija na fs vremenskoj skali. Sama zamisao o eksperimentalnom istraživanju na toj vremenskoj skali, u ono vrijeme, bila je jednaka ludilu. Izum lasera [1] 1960. godine dovodi do preokreta u eksperimentima atomske i molekulske fizike. Osim kontinuiranih lasera (emisija kontinuirana u vremenu), znanstvenici su uložili velike napore u usavršavanje pulsnih lasera (emisija zračenja skoncentrirana u kratke, isprekidane vremenske domene) kojima je vrijeme trajanja pulseva bivalo sve kraće i kraće. Tako su se preko mikrosekundnih $(1\ \mu s = 10^{-6}\ s)$, nanosekundnih $(1\ ns = 10^{-9}\ s)$ i pikosekundnih $(1\ ps = 10^{-12}\ s)$ pulseva, usavšavanjem tehnologije, krajem 80-tih pojavili laseri čiji su pulsevi trajali svega desetak femtosekundi. Pojava femtosekundnih lasera donijela je pravu revoluciju u znanosti.

Dvije su osnovne kategorije eksperimenata koje upotrebljavaju fs lasere. U prvoj su eksperimenti koji se baziraju na proučavanju vremenske dinamike nekog sistema. Tu prvenstveno spadaju eksperimenti proučavanja vibracija i rotacija molekula, za koje je A. Zewail 1999. godine dobio Nobelovu nagradu [2, 3]. Iz tih eksperimenata razvila se potpuno nova grana znanosti koja se bavi proučavanjem dinamike atomskih (molekulskih) jezgara, a naziva se femtokemija [4]. U drugu kategoriju spadaju eksperimenti koji koriste činjenicu da su fs pulsevi, pulsevi vrlo velike vršne snage. Npr. ako puls trajanja 50 fs i 1 mJ energije (srednja prosječna snaga po pulsu 20 gigavata) fokusiramo na površinu od 100 μm^2 dobivamo intenzitet zračenja od 20 petavata/ cm^2 $(20 \cdot 10^{15}\ W/cm^2 !!)$. Ovakav intenzitet odgovara električnom polju od oko 3 gigaV/cm, što je usporedivo s poljem vezanja u atomu. U takvim se eksperimentima fs laseri koriste za ionizaciju nekog plina, ablaciju (proces pri kojem zbog interakcije zračenja i materijala dolazi do trenutnog isparavanja materijala i nastaje krater), proučavanje nelinearnih svojstava nekog materijala, mikroskopiju,... Danas se fs laseri koriste u istraživačkim laboratorijima za istraživanja u području fizike, kemije i biologije. Međutim, njihova vrlo dobra industrijska komercijalizacija donijela im je primjenu i izvan samih znanstvenih laboratorija npr. u medicini, industriji, vojsci,...

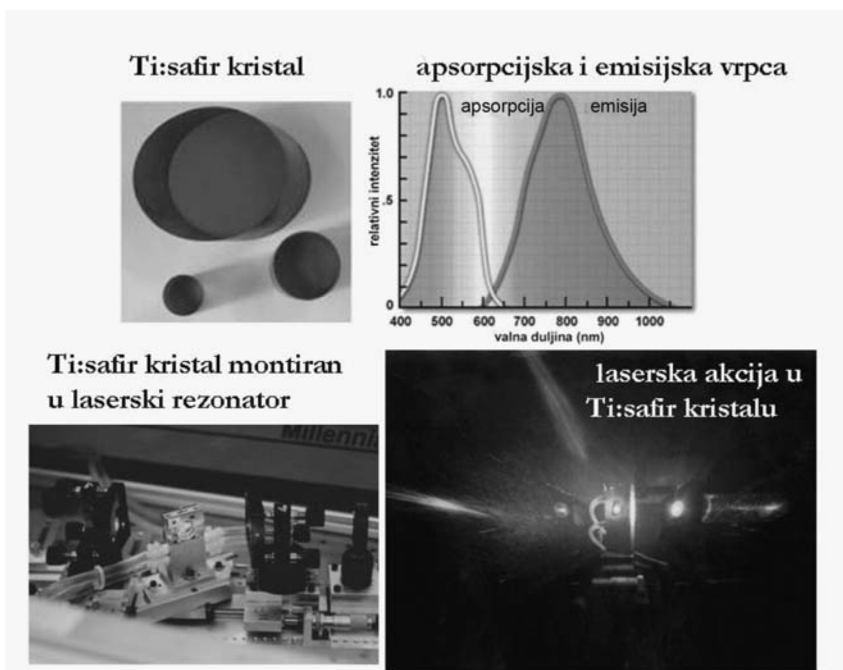


Slika 2. Matematički opis femtosekundnog pulsa.

Femtosekundni laseri emitiraju niz pulseva vremenskog trajanja nekoliko desetaka femtosekundi. Femtosekundni puls matematički se potpuno opisuje izgledom električnog polja koje ga sačinjava. Sa slike 2 vidimo da se to električno polje sastoji od brzo

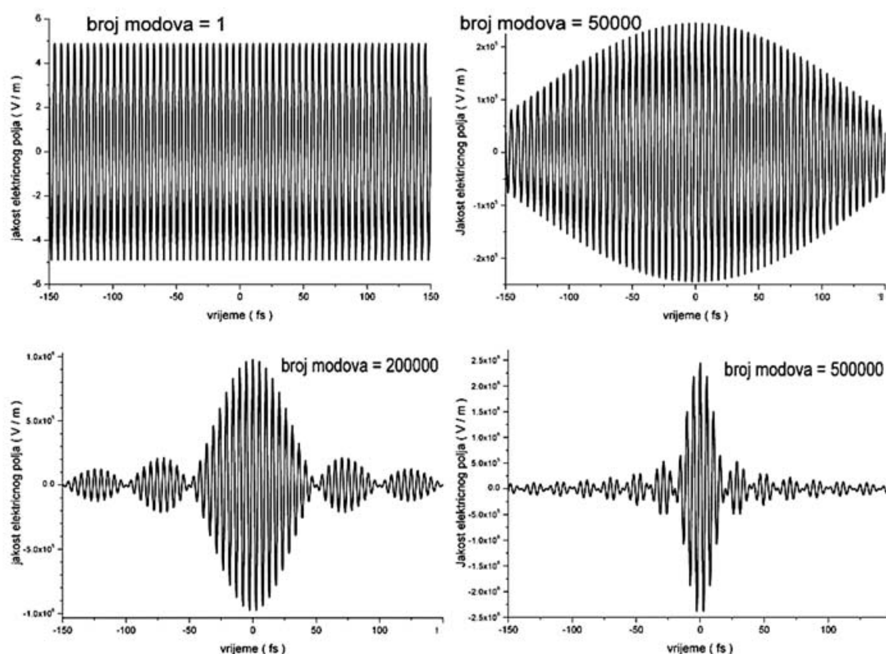
oscilirajućeg vala nosioca i sporo oscilirajuće ovojnice toga vala koja za prikazani puls ima oblik Gausove funkcije. Četiri su osnovna parametra koja određuju izgled fs pulsa: vrijeme trajanja pulsa (τ), jakost električnog polja (E_0), frekvencija vala nosioca (ω_c) i faza pulsa (Φ). Ako faza pulsa nije funkcija vremena onda imamo tzv. Fourier-limitirani puls, a ako je faza funkcija vremena dobivano frekventno modulirani puls. Val nosioc putuje faznom brzinom, v_f, a ovojnica putuje grupnom brzinom, v_g. Širenjem kroz neko disperzivno sredstvo (sredstvo čiji indeks loma ovisi o frekvenciji vala, $n(\omega)$) fazna i grupna brzina postaju različite, a određujemo ih iz sljedećih relacija:

$$\boxed{v_f = \frac{c}{n(\omega)}, \qquad v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \dfrac{dn(\omega)}{d\omega}} = \frac{c}{n_g}.}$$



Slika 3. Ti:safir kristal je najčešći laserski medij u femtosekundnim laserima.

Osnovni dijelovi lasera su: optička pumpa, medij koji stvara lasersku akciju i rezonator. Jedan rezonatorski mod može se predstaviti sinusnim valom. Unutar rezonatora mogu opstati samo oni longitudinalni modovi koji imaju čvorove na krajevima rezonatora. Udaljenost susjednih modova u frekvenciji, Δ, ovisi preko relacije $\Delta = c/2nL$ o brzini svjetlosti c i duljini rezonatora L. Za medij koji posjeduje široki emisijski spektar (npr. Ti:safir kristal čiji se emisijski spektar proteže od 600–1000 nm, vidi sliku 3) unutar rezonatora može istovremeno laserirati i do milijun modova. Ako takvi modovi svi titraju nezavisno, na izlazu iz rezonatora dobivamo lasersku emisiju kvazi-kontinuiranu u vremenu. Metoda sprezanja modova (tzv. *modelocking*) omogućila je da svi rezonatorski modovi titraju u fazi i kao rezultat zbrajanja električnih polja mnoštva modova (oko 10^6) koji svi titraju u fazi, nastaje u jednoj točki prostora rezonatora ultrakratki puls. Matematički opis generiranja ultrakratkih pulseva metodom sprezanja modova prikazan je na slici 4.



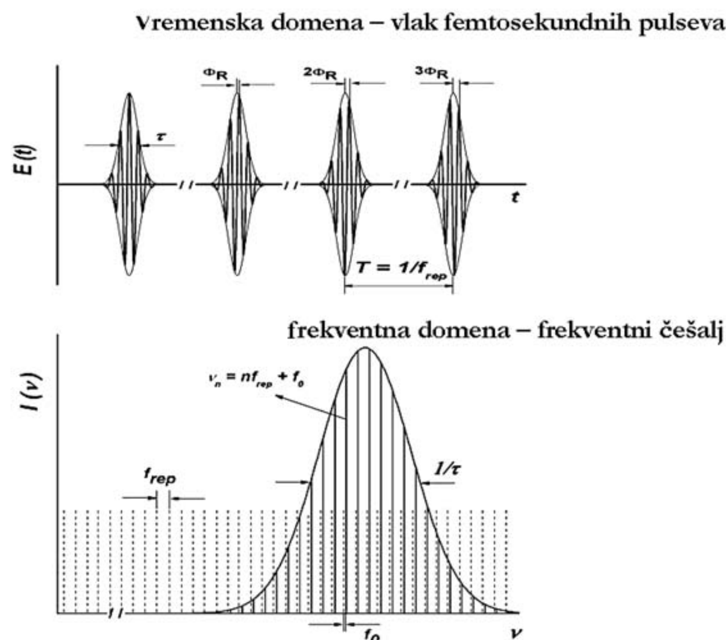
Slika 4. Sprezanje longitudinalnih modova unutar rezonatorske šupljine.

U eksperimentu, karakterizacija fs pulsa vrši se mjerenjem njegovog spektralnog ili intenzitetskog profila. Spektralni profil prikazuje ovisnost intenziteta pulsa o frekvenciji, a intenzitetski profil pokazuje ovisnost intenziteta pulsa o vremenu. Spektralna $(\Delta\omega)$ i vremenska $(\Delta\tau)$ poluširina fs pulsa nisu nezavisne veličine. Povezane su preko Fourierove relacije $\Delta\tau \cdot \Delta\omega \geqslant c_B$, gdje je c_B eksperimentalna konstanta karakteristična za određeni oblik ovojnice pulsa. Spektralni profil mjeri se komercijalno dostupnim spektrometrima (uređaji koji razlažu svjetlost na različite boje), dok se za mjerenje intenzitetskog profila upotrebljavaju metode autokorelacije i kroskorelacije [5, 6].

Kod nas na Institutu za fiziku u Laboratoriju za femtosekundnu lasersku spektroskopiju atoma i molekula (`http://projekt2.ifs.hr`), bavimo se proučavanjem atoma i molekula upotrebljavajući femtosekundni (fs) frekventni češalj. Frekventni češalj se može opisati kao niz vrlo uskih laserskih linija koje su sve međusobno povezane u fazi, a nalazimo ga kod svakog fs lasera ako se ne ograničimo samo na promatranje jednog fs pulsa, već promatramo niz fs pulseva međusobno udaljenih za period repeticije. Frekventni češalj u spektralnoj domeni analogan je nizu fs pulseva u vremenskoj domeni, vidi sliku 5.

T. W. Hänsch i J. L. Hall dobili su 2005. godine Nobelovu nagradu za njihov doprinos u razvoju vrlo precizne laserske spektroskopije, što prvenstveno uključuje upotrebu frekventnog češlja [7]. U njihovim se eksperimentima frekventni češalj koristio kao veza između optičkog i mikrovalnog dijela spektra. U našim eksperimentima koristimo frekventni češalj za pobuđivanje alkalijskih atoma [8, 9]. Zbog niza vrlo uskih spektralnih linija koje sačinjavaju frekventni češalj, moguće je s velikom preciznošću istraživati energijsku strukturu pojedinog atoma. S druge strane, promatrano u vremenskoj domeni, zbog niza fs pulseva, moguće je opažati efekte povezane s vremenskom dinamikom

atoma. Na takav način frekventni nam češalj ujedinjava spektralnu i vremensku domenu unutar atoma čime se otvara niz potpuno novih i zanimljivih spoznaja.



Slika 5. Femtosekundni pulsevi prikazani u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

Utrka znanstvenika s vremenom nije se zaustavila na femtosekundnoj skali, znanost žuri dalje prema još kraćim vremenima. Tokom 1990-tih godina, u znanstvene je laboratorije ušla attosekunda $(1 \text{ as} = 10^{-18} \text{ s})$. Attosekundni laseri omogućavaju slikanje gibanja samog elektrona, o čemu više možete pročitati na `http://www.attoworld.de`

Literatura

[1] `http://hr.wikipedia.org/wiki/Laser`

[2] A. ZEWAIL, *Femtochemistry*, WILEY-VCH GmbH, Germany 2001.

[3] `http://nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/1999/zewail-lecture.html`

[4] `http://www.physik.uni-wuerzburg.de/femto-welt`

[5] J.-C. DIELS, *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*, Elsevier 2006.

[6] `http://en.wikipedia.org/wiki/Autocorrelation`

[7] `http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2005/index.html`

[8] D. AUMILER, T. BAN, H. SKENDEROVIĆ, G. PICHLER, Phys. Rev. Lett. **95**, 233001 (2005).

[9] T. BAN, D. AUMILER, H. SKENDEROVIĆ, S. VDOVIĆ, N. VUJIČIĆ, G. PICHLER, Phys. Rev. A **76**, 043410 (2007).

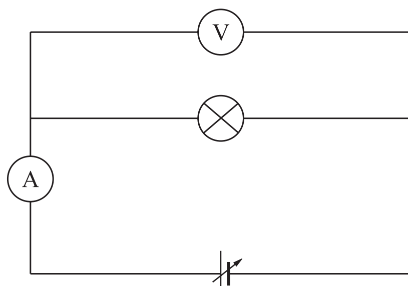
Istraživanje uzajamne ovisnosti snage zračenja i temperature

Jakov Labor[1]*, Šibenik*

Dok promatramo žaruljicu kako priključena na izvor struje svijetli, znamo da ona uzima električnu energiju iz izvora i istodobno emitira elektromagnetsko zračenje. Svjetlost koju opažamo samo je dio tog zračenja. Pri višim temperaturama žarne niti energija emitiranog elektromagnetskog zračenja je veća. Zanima nas kakva je uzajamna ovisnost energije emitirane u jedinici vremena (snage) i temperature. Da bismo to saznali moramo naći nekoliko vrijednosti snage i pripadajuće temperature.

Kada žarnom niti pri stalnom naponu teče struja stalne jakosti stalni su i otpor i temperatura žarne niti. Stalna temperatura žarne niti znači da je snaga elektromagnetskog zračenja koju ona emitira jednaka snazi koju uzima iz izvora struje. Prema tome, snagu (P) možemo odrediti iz izmjerenih vrijednosti napona (U) i jakosti struje (I),

$$P = UI.$$



Slika 1.

Shema strujnog kruga s izvorom struje promjenjiva napona, žaruljicom, voltmetrom i ampermetrom prikazana je na slici 1.

Do podataka o temperaturi dolazimo preko njezine veze s otporom, a ona glasi

$$R = R_0 \left[1 + \alpha(T - T_0)\right],$$

odnosno,

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0},$$

gdje su T_0 i R_0 početne vrijednosti temperature i otpora, R vrijednost otpora pri temperaturi T i α termički koeficijent otpora. Za žarnu nit od volframa taj koeficijent iznosi $4.2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$.

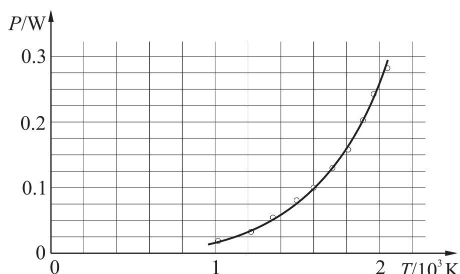
Vrijednosti otpora za svaku temperaturu nalazimo pomoću izraza

$$R = \frac{U}{I}.$$

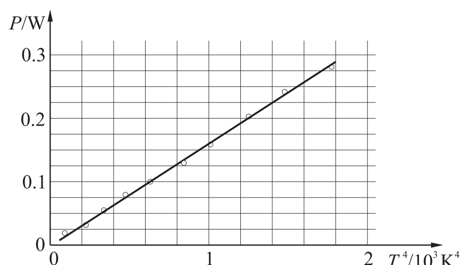
Podaci dobiveni mjerenjem su u tablici, a grafički prikaz nacrtan prema tim podacima u P, T – koordinatnom sustavu je na slici 2.

[1] Autor je profesor fizike na Gimnaziji Antuna Vrančića u Šibeniku.

$\frac{U}{\text{V}}$	$\frac{I}{\cdot 10^{-3}\text{A}}$	$\frac{P}{\text{W}}$	$\frac{R}{\Omega}$	$\frac{R_0}{\Omega}$	$\frac{T_0}{\text{K}}$	$\frac{\alpha}{\text{K}^{-1}}$	$\frac{T}{\text{K}}$	$\frac{T^4}{\cdot 10^{13}\text{K}^4}$
1.0	19.14	0.019	52.247				1015.8	0.11
1.5	24.03	0.036	62.422				1202.1	0.21
2.0	28.26	0.057	70.771				1355.1	0.34
2.5	32.13	0.080	77.808				1484.0	0.48
3.0	35.67	0.107	84.104	13.0	297.0	$4.2 \cdot 10^{-3}$	1599.3	0.65
3.5	39.03	0.136	89.675				1701.3	0.84
4.0	42.06	0.168	95.102				1800.7	1.05
4.5	45.06	0.203	99.867				1888.0	1.27
5.0	47.85	0.239	104.493				1972.7	1.51
5.5	50.58	0.278	108.739				2050.5	1.77



Slika 2.



Slika 3.

Iz grafa ne možemo pouzdano znati kako emitirana snaga ovisi o temperaturi. Moramo potražiti koordinatni sustav u kojem će graf imati oblik pravca. Tek tada pouzdano znamo da su veličine koje smo nanijeli na koordinatne osi upravno razmjerne. U našem slučaju graf ima oblik pravca u P, T^4-koordinatnom sustavu, što se vidi na slici 3. Prethodno smo crtali graf u P, T^2-i P, T^3-koordinatnom sustavu i vidjeli da nema oblik pravca. Dakle, iz grafa na slici 3 zaključujemo da je snaga zračenja žarne niti upravno razmjerna četvrtom stupnju apsolutne temperature:

$$P \sim T^4.$$

Tijelo može primati energiju iz okoline na različite načine, a ne samo u obliku električne energije iz izvora struje. Primjerice, u obliku elektromagnetskog zračenja. Općenito, samo dio upadnog zračenja tijelo apsorbira, a ostatak propušta i odbija. Zato se snaga zračenja koje dolazi od tijela sastoji od snage njegova vlastitog zračenja (koja je pri stalnoj temperaturi jednaka apsorbiranoj energiji) i snage zračenja koje ono odbija i propušta. Da bismo utvrdili kako snaga vlastitog zračenja tijela ovisi o temperaturi moramo eliminirati zračenje koje tijelo odbija i propušta. Odbijenog i propuštenog zračenja neće biti ako tijelo u potpunosti apsorbira upadno zračenje iz okoline. Takvo tijelo naziva se apsolutno crno tijelo. Istražujući zračenje apsolutno crnog tijela, slovenski fizičar J. Stefan otkrio je 1879. godine zakon koji se može iskazati jednadžbom

$$P = \sigma S T^4,$$

gdje je S površina tijela. Zakon je pet godina kasnije austrijski fizičar L. Boltzmann izveo teorijski. Danas taj zakon zovemo Stefan-Boltzmannovim, a konstantu razmjernosti $\sigma(= 5.67 \cdot 10^{-8}\ \text{Wm}^{-2})$ Stefan-Boltzmannovom konstantom. I kod tijela koja nisu apsolutno crna snaga zračenja (ne računajući prolazno i odbijeno zračenje) je razmjerna četvrtom stupnju apsolutne temperature. Kako ta tijela pri određenoj temperaturi apsorbiraju manje energije nego apsolutno crno tijelo (jer dio odbijaju i propuštaju), ona manje i zrače. Zbog toga je konstanta razmjernosti manja od σ.



Od astronomije do astrofizike

Dario Hrupec[1], *Koprivnica*

Sažetak

Koja je razlika između astronomije i astrofizike? Razlike zapravo nema. Točnije, danas je razlika toliko mala da je posve nevažna bilo kome izvan struke.

Uvod

Riječi su važne. One su posebno važne u znanosti kad njima opisujemo temeljne pojmove. A astronomija odnosno astrofizika prvenstveno je *znanost*.

Što je znanost?

Znanost je sustav znanja temeljen na *znanstvenoj metodi*. Znanstvena je metoda postupak prikupljanja znanja koji obično počinje postavljanjem pitanja, a nastavlja se oblikovanjem hipoteze ili pretpostavke koja mora biti provjerljiva. Idući je korak eksperiment ili opažanje kojim se pretpostavka potvrđuje ili opovrgava. Na kraju, znanstvena metoda uključuje izvještavanje i izvlačenje zaključaka.

Najvažniji je korak znanstvene metode provjera jesu li ideje u skladu s opažanjima u prirodi. Nove se ideje u znanosti ne prihvaćaju zato što su lijepe, utješne ili zato što u njih vjerujemo. Prihvaćaju se samo ako ih potvrdimo opažanjem.

Nadalje, u znanosti se sve tvrdnje mogu uvijek iznova preispitivati. Znanost potiče kritičko mišljenje – sposobnost odlučivanja, analiziranja i vrednovanja. Misliti kritički, znači ne prihvaćati ništa bez prethodne analize i vrednovanja. Ovaj neobičan, ali vrlo učinkovit stav da "u sve treba sumnjati" potječe od iznimno utjecajnog francuskog filozofa i matematičara Renéa Descartesa koji je bio ključna osoba znanstvene revolucije – niza događaja koji su utemeljili modernu znanost. Znanstvena revolucija počela je 1543. godine, objavljivanjem Kopernikove ideje heliocentričnog sustava, a trajala je cijelo 17. stoljeće, u doba baroka.

Povijesno gledano, glavno otkriće 17. stoljeća bila je moderna znanost. Tada je počela druga velika eksplozija znanja u povijesti čovječanstva, koja traje sve do danas. Prva velika eksplozija znanja zbila se u doba starih Grka, u 6. i 5. stoljeću prije nove ere, kad je Tales došao na veličanstvenu ideju da je "svijet ljudskom umu spoznatljiv". Iz te ideje rodila se znanost pa Talesa nazivamo ocem znanosti. U 17. su stoljeću ljudi spoznali *kako* otkrivati istine o prirodi, odnosno pronašli su znanstvenu metodu.

---

[1] Autor je asistent u Institutu "Ruđer Bošković" u Zagrebu, e-mail: `dario.hrupec@irb.hr`

Što je astronomija?

Tehnički govoreći, astronomija je znanost mjerenja položaja i svojstava nebeskih objekata. Podrijetlo riječi je grčko: *ástron* znači zvijezda, a *nómos* zakon. Doslovno, astronomija traži zakone, red ili pravila ponašanja zvijezda. Ne opaža radi opažanja nego radi razumijevanja. Ona je znanost o zvijezdama ili *zvjezdoznanstvo*.

Drevnu astronomiju ne treba miješati s astrologijom. Premda oba područja imaju isto ishodište, ciljevi im se razlikuju od samih početaka. Riječ astrologija također ima grčko podrijetlo: *lógos* znači govor. Astrologija je nadriučenje o "govoru zvijezda" odnosno o "proricanju sudbine" čovjeka prema položaju zvijezda. Iako astrologija ima dugu tradiciju, dulju nego moderna znanost, ona je tipičan primjer sustava znanja koji NIJE ZNANOST. Astrologija se ne temelji na znanstvenim metodama nego, poput religije, na vjerovanju. Astrologija je mistična pseudoznanost koju možemo zvati *zvjezdogatnja*.

U današnjem smislu **astronomija je znanstveno istraživanje nebeskih objekata**. To je znanost koja istražuje kozmos. Kozmos je sve što je bilo i što će biti. Na grčkom *kósmos* znači red u svemiru, a suprotnost mu je kaos. Naći red u svemiru zapravo znači spoznati svijet. Zato astronomija nije samo najstarija znanost. Ona je u svakom smislu prva znanost.

Što je astrofizika?

Doslovno, astrofizika je *primjena fizike u razumijevanju astronomije* i usko je povezana s onim što astronomija može opažati. Temeljna je pretpostavka astrofizike da standardni zakoni fizike, koje smo spoznali na Zemlji, vrijede za cijeli kozmos – dakle uvijek i svugdje.

Astrofizika je nastala iz astronomije onda kad su za tumačenje astronomskih opažanja prvi put primijenjeni zakoni fizike, a ne samo geometrija ili logika. Vjerojatno je prvi primjer prave astrofizike bio izračunavanje mase Sunca iz astronomskog opažanja udaljenosti Zemlja-Sunce (prvi put procijenjene iz mjerenja Marsove paralakse[2] 1672. godine) i primjene općeg zakona gravitacije (objavljenog 1687. godine u Newtonovoj knjizi *Philolosophiae Naturalis Principia Mathematica*).

POVIJESNO PRVI PRIMJER PRAVE ASTROFIZIKE
"gravitacijska sila" = "centripetalna sila"
$$G\frac{m_\odot \cdot m_\oplus}{R^2} = \frac{m_\oplus \cdot v^2}{R}$$ $$G\frac{m_\odot}{R} = v^2$$ $$G\frac{m_\odot}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2$$ $$G\frac{m_\odot}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$ $$m_\odot = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2\,(150 \text{ milijuna km})^3}{6.67 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \cdot (1 \text{ godina})^2} = 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}.$$

[2] Paralaksa je prividan pomak tijela pri opažanju iz dva različita smjera.

Zaključak

Tradicionalno, znanstvenika koji većinu vremena provodi opažajući nebeske pojave nazivamo *astronomom*, a znanstvenika koji većinom tumači ta opažanja koristeći fiziku nazivamo *astrofizičarom*.

Astrofizika se temelji na astronomskim opažanjima. Astrofizičari grade instrumente i sudjeluju u opažanjima. S druge strane, astronomija se temelji na fizici. Svi astronomi danas koriste fiziku kako bi razumjeli ono što opažaju.

Svi su današnji znanstvenici koji istražuju nebeske pojave mješavina astronoma i astrofizičara. Stoga izbor naziva astronom ili astrofizičar ostaje samo stvar ukusa.

Literatura

[1] WIKIPEDIA, *Astronomy*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Astronomy`

[2] W. H. PRESS, *Introduction to Astrophysics*, `http://www.lanl.gov/DLDSTP/ay45/ay45toc.html`

[3] B. MÉNDEZ, *Introduction to General Astronomy*, `http://cse.ssl.berkeley.edu/bmendez/ay10/2002/notes/lec1.html`

[4] CHARLES VAN DOREN, *Povijest znanja*, Mozaik knjiga, 2005.

⋆ ⋆ ⋆



ZABAVNA MATEMATIKA

Broj 365

Profesor Godinić često postavlja probleme u vezi s danima, mjesecima i godinom. Evo najnovijeg:

— Broj 365 uvijek podsjeća na godinu i broj dana u njoj. Međutim, pred nama je prijestupna godina 2008. koja ima 366 dana. Zanimljivo je da se oba broja, 365 i 366, lako mogu prikazati pomoću kvadrata. Zadržat ćemo se na broju 365. Najzanimljivije činjenice o tome broju jesu da se on može prikazati kao zbroj ili razlika dvaju kvadrata, odnosno kao zbrojevi ili razlike kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva. Postoje i drugi prikazi broja 365 pomoću dva ili tri kvadrata. Vaš je zadatak da istražite te mogućnosti.

365

— Samo to? — tiho se javila zadnja klupa. — Pa tu ima posla za jednog Einsteina!

Što vi mislite?

Zlatnici

Numizmatičar Gold u svojoj kolekciji ima dvije vrste zlatnika. Svaki zlatnik prve vrste teži 25 grama, a onaj druge vrste 21 gram. Težina svih zlatnika zajedno iznosi točno 1 kilogram.



Koliko zlatnika prve, a koliko druge vrste ima Gold?

Koliko puta?

Brat i sestra, Branko i Sanja, vole rješavati zadatke iz zabavne matematike. Nema velikih računanja, potrebno je malo kombiniranja i domišljatosti.

— U kvadrat 4×4 upisan je četiri puta matematički pojam BROJ. Ta riječ može se pročitati i više puta ako se čita od bilo kojeg slova B i povezuju susjedna slova. Na koliko se ukupno načina to može učiniti? — pročitala je Sanja novi problem.

B	B	B	B
R	R	R	R
O	O	O	O
J	J	J	J

— Da pogledamo — rekao je kratko Branko.

Pogledajte i vi.

Uljez

Na sat matematike o mjerama i mjerenjima profesor je donio skup novčića. Razred je pažljivo slušao objašnjenje:

— Ovdje su 33 po obliku jednaka novčića, ali među njima je jedan koji nema istu težinu kao ostali. Nije poznato je li on lakši ili teži od njih. Pitanje glasi: koliko je najmanje potrebno mjerenja na vagi bez utega da se to ustanovi?



Razred je brzo našao taj najmanji broj mjerenja. Nadamo se da to ni vama neće biti teško.

Buketi

Cvjećar Tučak zadovoljno je promatrao knjigu prodaje na kraju jeseni: prodao je točno 200 buketa s karanfilima, ružama i tulipanima. U 37 buketa bili su sami karanfili, u 56 samo ruže, a u 44 samo tulipani. Karanfili i ruže bili su u 28 buketa, karanfili i tulipani u 33, a ruže i tulipani u 40.



Što manjka? Manjka broj buketa koji su sadržavali sve tri vrste cvijeća. Odredite taj broj.

Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2008. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/ 232.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

3077.* Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a s je njegov poluopseg. Ako je

$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}=s,$$

dokaži da je trokut jednakostraničan.

3078.* Dana su tri broja: 2, 2, 2. Bilo koji broj možemo zamijeniti zbrojem drugih dvaju uvećanim za 1. Ovaj postupak možemo ponoviti po volji mnogo puta. Možemo li na taj način dobiti brojeve 2006, 2007, 2008?

3079. Za koje sve cijele brojeve a jednadžba

$$x^3-13x+a=0$$

ima tri cjelobrojna rješenja.

3080.* Kvadratu $ABCD$ konstruiran je jednakostraničan trokut ABE unutar njega i jednakostraničan trokut BCF izvan njega. Dokaži da su točke D, E i F kolinearne.

3081.* Kvadrat $MNPQ$ upisan je u pravokutan trokut ABC, tako da mu stranica $\overline{MN}$ leži na hipotenuzi $\overline{AB}$ trokuta. Dokaži da je $|AB|\geq 3|MN|$. Kada vrijedi jednakost?

3082. Na stranicama pravokutnog trokuta konstruirani su kvadrati. Njihovih šest vrhova, koji nisu vrhovi trokuta, leže na istoj kružnici. Dokaži da je trokut jednakokračan.

3083.* Dokaži da u svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{v_a^2}+\frac{1}{v_b^2}+\frac{1}{v_c^2}\geq\frac{1}{3r^2},$$

gdje su v_a, v_b, v_c njegove visine, a r polumjer upisane mu kružnice.

3084.* Promjer kružnice sa središtem O, polumjera r, je $\overline{AC}$. Na kružnici su dane točke B i D, takve da je sjecište pravaca AC i BD točka E, te $|ED|=r$. Dokaži da je $\sphericalangle AOB=3\sphericalangle DEC$.

3085. Dokaži da za svake brojeve a, b, $c\in(1,\infty)$ vrijedi nejednakost

$$a^{\sqrt{\log_a b}+\sqrt{\log_a c}}+b^{\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_b c}}$$
$$+c^{\sqrt{\log_c a}+\sqrt{\log_c b}}\leq ab+bc+ca.$$

3086. Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom u vrhu A. S x i y su označene duljine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Neka je D točka na $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle DAC=30^\circ$. Odredi $|AD|$ u zavisnosti od x i y.

3087. Odredi maksimalnu i minimalnu vrijednost izraza

$$\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta},$$

gdje su a i b dani brojevi.

3088. Koliko je

$$\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}?$$

3089. U sferu polumjera R upisana je pravilna četverostrana piramida, čiji je ravninski kut u vrhu jednak γ. Odredi površinu bočne plohe piramide. Za koji kut γ je ta površina najveća?

3090. Koliko puta treba baciti kocku da vjerojatnost da će se barem jedanput pojaviti šestica, bude veća od $\frac{1}{2}$?

B) Zadaci iz fizike

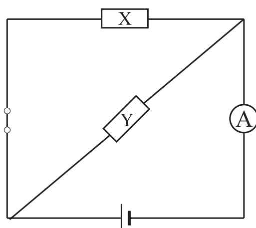
OŠ – 270. Sara je za rođendan dobila zlatnu ogrlicu. U učionici za fiziku je izmjerila da je njena masa 30 grama, a obujam 2 cm^3. Odredite je li ogrlica od 18-karatnog ili 14-karatnog zlata. 18-karatno zlato sadrži 75% zlata, a 14-karatno 58.5%. Ostalo je bakar. Gustoća zlata je 19 300 kg/ m^3, a bakra 8 900 kg/ m^3.

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

OŠ – 271. Ivan priprema kupku tako da miješa vruću vodu temperature 60 °C i hladnu vodu temperature 14 °C. Dobio je 80 litara vode temperature 44 °C. Koliko je stavio hladne, a koliko vruće vode?

OŠ – 272. Pizzerija u svojoj ponudi nudi pizzu u dvije veličine. Manja ima promjer od 25 cm i cijenu od 25 kuna, a veća ima promjer od 35 cm i košta 45 kuna. Debljina im je jednaka. Koja pizza ima bolji odnos cijene i količine?

OŠ – 273. Izvor struje u strujnom krugu na slici ima napon 6 V. Kad je prekidač zatvoren ampermetar pokazuje vrijednost struje 500 mA. Koliko će ovaj pokazivati kada prekidač bude otvoren? Vrijednost otpora X iznosi 20 Ω.



1378. Dva identična auta ulaze u zavoj od 90° paralelno jedan s drugim. Ako se auto koji ide unutarnjom stranom zavoja giba kružnicom radijusa 28 m, a onaj drugi po kružnici radijusa 32 m, te uz pretpostavku da je koeficijent trenja okomit na smjer gibanja jednak za oba automobila i iznosi 1, kolike su maksimalne brzine koje auti mogu održati u zavoju? Koji će auto prije proći zavoj?

1379. Zamislimo dva topa mase 1 t, jedan ukopan u zemlju, a drugi na površini (trenje zanemarite). Ispaljuju granate mase 50 kg relativne brzine prema topu 900 km/h. Kolika je razlika u dometu granata ako je cijev topa pod kutem 30° prema površini?

1380. Dva točkasta tijela mase 1 g i naboja 1 μC mogu se gibati po kružnici radijusa 10 cm u ravnini okomitoj na površinu Zemlje. Nađite ravnotežni položaj.

1381. Unutar pločastog kondenzatora stavimo metalnu pločicu debljine $d = \dfrac{D}{3}$ gdje je D razmak između ploča kondenzatora. Za koliko se promijeni kapacitet kondenzatora? Može li se takav kondenzator prepoznati kao dva kondenzatora spojena u seriju?

1382. U bazenu površine 20 m^2 razliveno je 0.01 dl ulja indeksa loma 1.32. Pod kojim kutom se vidi maksimum svjetlosti valne duljine 600 nm?

1383. Komad drva dimenzija 10 cm × 20 cm × 20 cm gustoće 860 $\mathrm{kg/m}^3$ pluta u vodi tako da mu je ploha 20 cm × 20 cm paralelna s površinom vode. Komad je malo potopljen i pušten da titra. Kolika je frekvencija titranja?

1384. Uska cilindrična cijev duljine 80 cm i otvorena na oba kraja potopljena je do pola u živu gustoće 13.6 $\mathrm{g/cm}^3$. Tada je cijev začepljena na gornjoj strani i izvađena iz žive. Duljina stupca žive koji je ostao u cijevi je 22 cm. Koliki je atmosferski tlak?

C) Rješenja iz matematike

3049. *Neka su a, b, c međusobno različiti realni brojevi. Može li izraz*

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

biti jednak nuli?

Rješenje. Pretpostavimo da postoje brojevi $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ takvi da je

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=0.$$

Tada redom imamo

$$a^2(c-b)+b^2[(a-b)+(b-c)]+c^2(b-a)=0,$$
$$a^2(c-b)+b^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(b-a)=0,$$
$$a^2(c-b)+b^2(a-b)-b^2(c-b)-c^2(a-b)=0,$$
$$(a-b)(b^2-c^2)+(c-b)(a^2-b^2)=0,$$
$$-(a-b)(c-b)(c+b)+(c-b)(a-b)(a+b)=0,$$
$$(a-b)(c-b)[-(c+b)+(a+b)]=0,$$
$$(a-b)(c-b)(a-c)=0,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Zato dani izraz ne može biti jednak nuli.

Marko Picutić (1),
Srednja škola Zlatar, Zlatar

3050. *Ako je x pozitivan broj takav da je $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$, odredi $x^5+\dfrac{1}{x^5}$.*

Rješenje. Lako možemo uočiti da je:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9.$$

Kako je x pozitivan broj slijedi

$$x+\frac{1}{x} = 3,$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^4-x^2+1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right),$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}-\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+1\right),$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2 = 47,$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=3\cdot(47-7+1) = 123.$$

Vanja Ubović (1),
Gimnazija P. Preradovića, Virovitica

3051. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\left|\left|x-\frac{5}{2}\right|-\frac{3}{2}\right| = \left|x^2-5x+4\right|.$$

Rješenje.

$$\left|x-\frac{5}{2}\right| = x-\frac{5}{2} \text{ za } x \geqslant \frac{5}{2}, \quad \text{ili}$$

$$-x+\frac{5}{2} \text{ za } x < \frac{5}{2}.$$

Sada razlikujemo dva slučaja:

1° $\left|x-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right| = |x^2-5x+4|$ i

2° $\left|-x+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right| = |x^2-5x+4|$.

Ako je $|a| = |b|$, onda je $a = b$ ili $a = -b$. Stoga u oba slučaja razlikujemo dvije mogućnosti:

1° a) $x-4 = x^2-5x+4$,
odakle slijedi $x_1 = 2$, $x_2 = 4$;

b) $x-4 = -x^2+5x-4$,
odakle slijedi $x_3 = 2$, $x_4 = 4$; no rješenje danih jednadžbi je samo 4 jer je $x \geqslant \frac{5}{2}$.

2° a) $-x+1 = x^2-5x+4$,
odakle je $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;

b) $-x+1 = -x^2+5x-4$,
odakle je $x_3 = 1$, $x_4 = 5$; no rješenje danih jednadžbi je samo 1 jer je $x < \frac{5}{2}$.

Rješenja zadane jednadžbe su brojevi 1 i 4.

Vanja Ubović (1), Virovitica

3052. *Nađi sve dvoznamenkaste brojeve od kojih je svaki za 9 veći od zbroja kvadrata njegovih znamenaka.*

Rješenje.

$$10x + y = 9 + x^2 + y^2$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - 10x + y^2 - y + 9 = 0.$$

Kako je $y \in \mathbf{R} \implies D \geqslant 0$, tj.

$$(-10)^2 - 4\cdot 1\cdot (y^2 - y + 9) \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow 16 \geqslant y(y-1).$$

Kako je $y > y-1 \implies 16 > (y-1)^2$, tj. $y < 5$, odnosno $y \leqslant 4$, a kako je to nenegativan prirodan broj slijedi $y \in \{0,1,2,3,4\}$. Pa razmotrimo sljedeće slučajeve.

1° $y = 0$, $x^2 - 10x + 9 = 0$, $x = 5 \pm 4$ tj.

$$x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = 9;$$

2° $y = 1$, $x^2 - 10x + 9 = 0$, tj.

$$x_3 = 1 \quad \text{i} \quad x_4 = 9;$$

3° $y = 2$, $x^2 - 10x + 11 = 0$,

$$x = 5 \pm \sqrt{14} \notin \mathbf{N};$$

4° $y = 3$, $x^2 - 10x + 15 = 0$,

$$x = 5 \pm \sqrt{10} \notin \mathbf{N};$$

5° $y = 4$, $x^2 - 10x + 21 = 0$, $x = 5 \pm 2$ tj.

$$x_5 = 3 \quad \text{i} \quad x_6 = 7.$$

Dakle $\overline{xy} \in \{10, 90, 11, 91, 34, 74\}$.

Edin Ajanović (3),
Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH

3053. *Ako za kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 vrijedi*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1,$$

dokaži da je $z_1 = z_2 = z_3$ ili su z_1, z_2, z_3 u kompleksnoj ravnini vrhovi jednakostraničnog trokuta.

Rješenje. Ako je $z_1 = z_2$ onda se iz dane jednakosti dobiva

$$z_2^2 + z_3^2 = 2z_2z_3, \quad \text{tj.} \quad (z_2 - z_3)^2 = 0,$$

pa je $z_2 = z_3$, tj. $z_1 = z_2 = z_3$. Pretpostavimo da je $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$. Iz dane jednakosti se dobiva

$$(z_2 - z_3)^2 = (z_3 - z_1)(z_1 - z_2),$$

osnosno

$$|z_2 - z_3|^3 = |z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1|.$$

Analogno se dobiva

$$|z_1 - z_2|^3 = |z_3 - z_1|^3 = |z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1|.$$

Odavde slijedi

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|,$$

što znači da su z_1, z_2, z_3 vrhovi jednakostraničnog trokuta.

Ur.

3054. *Dokaži da za brojeve* $a, b, c \in (0, 1)$ *vrijedi nejednakost*

$$\log_a \frac{3bc}{bc + a(b+c)} + \log_b \frac{3ca}{ca + b(c+a)} + \log_c \frac{3ab}{ab + c(a+b)} \geq 0.$$

Kada se dostiže jednakost?

Rješenje. Iz $ab+bc+ac \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ slijedi

$$\frac{3bc}{ab + bc + ac} \leqslant \frac{3bc}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $ab = bc = ac$ tj. ako je

$$a = b = c. \qquad (*)$$

Kako je $\log_a x$, $a \in \langle 0, 1 \rangle$ padajuća funkcija imamo

$$\log_a \frac{3bc}{bc + a(b+c)} \geqslant \log_a \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} = \frac{1}{3}(\log_a b + \log_a c) - \frac{2}{3}.$$

Slično vrijedi i za preostala dva slučaja, pa imamo

$$\log_a \frac{3bc}{bc + a(b+c)} + \log_b \frac{3ca}{ca + b(c+a)} + \log_c \frac{3ab}{ab + c(a+b)}$$

$$\geqslant \frac{1}{3}(\log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c a + \log_c b) - 3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + \log_a c + \frac{1}{\log_a c} + \log_b c + \frac{1}{\log_b c}\right) - 2$$

$$\geqslant \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\log_a b}{\log_a b}} + 2\sqrt{\frac{\log_a c}{\log_a c}} + 2\sqrt{\frac{\log_b c}{\log_b c}}\right) - 2 = 0.$$

Kako su a, b, $c \in \langle 0, 1 \rangle$, $\log_a b$, $\log_a c$ i $\log_b c$ su pozitivni, u posljednjoj nejednakosti smo koristili $A \geqslant G$, gdje jednakost vrijedi samo ako je $\log_a b = \dfrac{1}{\log_a b}$, $\log_a c = \dfrac{1}{\log_a c}$, $\log_b c = \dfrac{1}{\log_b c}$, a uzimajući u obzir i $(*)$ imamo za jednakost samo $a = b = c$.

Vedran Rafaelić (4),
Opća gimnazija, SŠ V. Gortana, Buje

3055. *Riješi jednadžbu*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}.$$

Rješenje. Uz zamjenu $\sqrt{1-x^2} = y$ dobivamo

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Sada dana jednadžba glasi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{35}{12},$$

odnosno

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{35}{12}.$$

Lijeva strana u zadanoj jednadžbi može se zapisati pomoću osnovnih simetričnih polinoma $p_1 = x + y$ i $p_2 = xy$, pa slijedi

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{35}{12}.$$

Odavde je

$$p_1 = 35k, \quad p_2 = 12k. \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = p_1^2 - 2p_2 = 1,$$

zbog (1) nakon sređivanja slijedi

$$1225k^2 - 24k - 1 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su: $k_1 = \frac{1}{25}$, $k_2 = -\frac{1}{49}$.

Iz (1) dobijemo dva ekvivalentna sustava jednadžbi:

$$1^\circ \quad x+y=\frac{7}{5}, \quad xy=\frac{12}{25}, \qquad 2^\circ \quad x+y=-\frac{5}{7}, \quad xy=-\frac{12}{49}.$$

Iz prvog sustava dobivamo rješenja $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{4}{5}$, a iz drugog $x_3 = \frac{-5+\sqrt{73}}{14}$, $x_4 = \frac{-5-\sqrt{73}}{14}$.

Kako je $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$, i $\frac{1}{x_3} > \frac{35}{12}$ rješenje drugog sustava nije x_3. Provjerom utvrđujemo da je skup svih rješenja

$$S = \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{-5-\sqrt{73}}{14}\right\}.$$

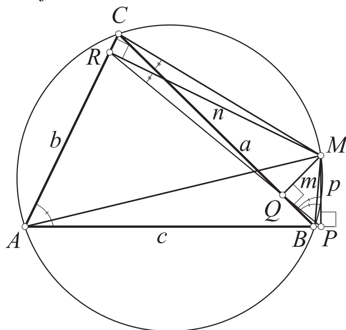
Vanja Ubović (1), Virovitica

3056. *Oko trokuta ABC sa stranicama duljina a, b, c opisana je kružnica. Neka su m, n, p udaljenosti neke točke M na luku $\overset{\frown}{BC}$ nasuprot vrha A do pravaca BC, CA, AB. Dokaži da vrijedi*

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{p},$$

neovisno o izboru točke M.

Rješenje.



Četverokuti $APMR$ i $ABMC$ su tetivni pa su $\angle RMP$ i $\angle CMB$ suplementi od $\angle PAC$. Tada je i

$$\angle CMR = \angle BMP. \qquad (1)$$

Četverokut $MCRQ$ je tetivni ($\overline{MC}$ je hipotenuza pravokutnih trokuta MCQ i MCR) te isto vrijedi i za $MQBP$. Koristeći te činjenice i (1) imamo

$$\angle CQR = \angle CMR = \angle BMP = \angle BQP,$$

pa Q leži na dužini $\overline{RP}$. Također su jednaki kutovi $\angle R$ i $\angle C$ nad tetivom $\overline{QM}$, pa su trokuti PMR i BMC slični. Slijedi $\frac{n}{p} = \frac{|CM|}{|MB|}$.

Pretpostavimo da vrijedi dana jednakost. Tada je redom

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{p},$$

$$a\frac{n}{m} = b + c\frac{n}{p} = b + c\frac{|CM|}{|MB|},$$

$$a\frac{n|MB|}{m} = b|MB| + c|CM|. \qquad (2)$$

Kutovi $\angle QBM$ i $\angle MAC$ su sukladni (nad tetivom $\overline{MC}$), pa su trokuti QBM i AMR slični, jer su i pravokutni. Slijedi

$$\frac{|MB|}{m} = \frac{|AM|}{n}, \qquad \frac{n|MB|}{m} = |AM|.$$

Uvrštavanjem u (2) imamo

$$a|AM| = b|MB| + c|CM|,$$

što je uvijek točno po Ptolemejevom poučku (umnožak dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka nasuprotnih strana). Zato vrijedi i dana jednakost.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3057. *Dan je trapez ABCD, kod kojeg je BC ∥ AD i O sjecište njegovih dijagonala. Dokaži sljedeće omjere:*

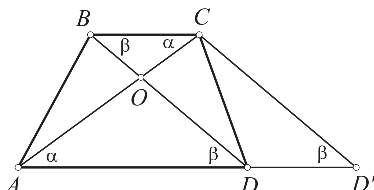
$$\frac{|AO|\cdot|OC|}{|AC|^2} = \frac{|OB|\cdot|OD|}{|BD|^2},$$

$$\frac{|OA|\cdot|OD|}{|AD|^2} = \frac{|OB|\cdot|OC|}{|BC|^2}.$$

Rješenje. Iz sličnosti trokuta ADO i CBO slijedi

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|OC|}{|OB|} \Big/ \cdot (|OC|\cdot|OD|\cdot|OB|^2)$$

$$|AO|\cdot|OC|\cdot|OB|^2 = |OB|\cdot|OD|\cdot|OC|^2. \quad (1)$$



Povucimo paralelu s BD u točki C i produžimo AD do D'. Kako je $\sphericalangle CD'A \cong \sphericalangle OBC$ trokuti $AD'C$ i CBO su slični pa je:

$$\frac{|OB|}{|OC|} = \frac{|CD'|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|AC|}$$
$$\Longrightarrow |OB|^2 = \frac{|OC|^2 \cdot |BD|^2}{|AC|^2}.$$

Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$\frac{|AO| \cdot |OC|}{|AC|^2} = \frac{|OB| \cdot |OD|}{|BD|^2}.$$

Slično i za drugi omjer:

$$\frac{|OA|}{|AD|} = \frac{|OC|}{|BC|} \;\Big/\; \cdot \frac{|OD| \cdot |OB|}{|AD| \cdot |BC|},$$
$$\frac{|OA| \cdot |OD|}{|AD|^2} \cdot \frac{|OB|}{|BC|} = \frac{|OB| \cdot |OC|}{|BC|^2} \cdot \frac{|OD|}{|AD|}. \quad (2)$$

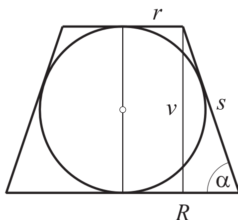
Kako iz sličnosti trokuta ADO i CBO slijedi: $\frac{|OB|}{|BC|} = \frac{|OD|}{|AD|}$ i kraćenjem tih faktora u (2) dobivamo drugi omjer.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3058. *Ravnina paralelna bazi pravilnog stošca odsijeca njegov vrh, tako da se u dobiveni krnji stožac može upisati kugla čiji je volumen jednak polovini volumena krnjeg stošca. Koliki je kut između izvodnice stošca i ravnine njegove baze.*

Rješenje. Ako su R i r $(R \geqslant r)$ polumjeri baza krnjeg stošca i r njegova visina, tada je njegov volumen

$$V_1 = \frac{\pi v}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$



Polumjer upisane kugle je $r_1 = \frac{v}{2}$, gdje je v visina stošca. Volumen kugle je

$$V_2 = \frac{4}{3} r_1^3 \pi = \frac{1}{6} v^3 \pi.$$

Kako je $V_1 = 2V_2$ imamo

$$\frac{\pi v}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3} v^3 \pi \quad \text{tj.}$$
$$R^2 + Rr + r^2 = v^2. \quad (1)$$

Da bi se u krnji stožac mogla upisati kugla, mora karakterističan presjek (trapez) biti tangencijalan, pa je $2R + 2r = 2s$, odakle dobivamo

$$R + r = s = \sqrt{v^2 + (R - r)^2},$$

pa je $v^2 = 4Rr$. Uvrštavanjem u (1) imamo

$$R^2 - 3Rr + r^2 = 0, \quad \text{tj.} \quad R = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} r.$$

Kako je $R \geqslant r$ mora biti

$$R = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} r,$$
$$v = \sqrt{4Rr} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} r = (1 + \sqrt{5}) r.$$

Dakle,

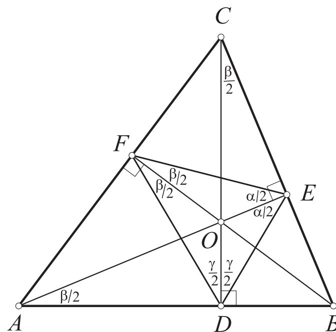
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{R - r} = \frac{(1 + \sqrt{5}) r}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} r - r} = 2,$$

odakle je $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 2 \approx 63^\circ 26' 6''$.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3059. *Točke D, E, F su nožišta visina trokuta ABC. Ako je $|DF| = 13$, $|EF| = 14$, $|DE| = 15$, odredi površinu trokuta ABC.*

Rješenje.



Dokažimo najprije da su visine trokuta ABC ujedno i simetrale kutova trokuta DEF. Trokuti ABE i CDB imaju jedan pravi kut i zajednički kut $\sphericalangle CBA$ pa su i kutovi $\sphericalangle DAO$ i $\sphericalangle OCE$ sukladni. Kako je četverokut $ADOF$ tetivni $\sphericalangle DAO \cong \sphericalangle DFO$ (kutovi nad istom tetivom). Također iz $ECFO$ imamo $\sphericalangle OCE \cong \sphericalangle OFE$ i zaključno $\sphericalangle DFO \cong \sphericalangle OFE$. Na isti način se dokazuje i za druge kutove. Po poučku o sinusima iz trokuta DCF je

$$\frac{|CD|}{\sin\left(90^\circ + \dfrac{\beta}{2}\right)} = \frac{|DF|}{\sin\left(90^\circ - \dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

$$\Longrightarrow\ |CD| = \frac{|DF|\cos\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

iz trokuta ADF imamo

$$\frac{|AD|}{\sin\left(90^\circ - \dfrac{\beta}{2}\right)} = \frac{|DF|}{\sin\dfrac{\gamma+\beta}{2}}$$

$$\Longrightarrow\ |AD| = \frac{|DF|\cos\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}},$$

iz trokuta DBE dobivamo

$$\frac{|BD|}{\sin\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{|DE|}{\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$$

$$\Longrightarrow\ |BD| = \frac{|DE|\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}.$$

Površina trokura ABC je

$$P_{ABC} = \frac{|CD|\cdot|AB|}{2} = \frac{|CD|}{2}(|AD|+|BD|)$$

$$= \frac{|DF|\cos\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\left(\frac{|DF|\cos\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{|DE|\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}\right)$$

$$= \frac{|DF|^2\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{\sin\alpha} + \frac{|DF||DE|\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Lako računamo po kosinusovom poučku iz trokuta DEF: $\cos\alpha = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{5}}$ (vrijednosti su pozitivne jer su kutovi šiljasti) i $\cos\beta = \dfrac{5}{13} \Longrightarrow \cos^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{9}{13}$. Sada je

$$P_{ABC} = 341.25.$$

Vedran Rafaelić (4), Buje

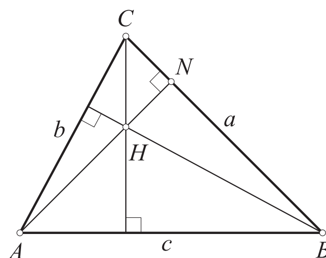
3060. *Ako je točka H sjecište visina šiljastokutnog trokuta ABC, dokaži nejednakost*

$$\frac{a}{|AH|} + \frac{b}{|BH|} + \frac{c}{|CH|} \geq \frac{s^2}{P},$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ *i* P *površina tog trokuta.*

Rješenje. Imamo

$$a|AH| = a(|AN| - |HN|)$$
$$= 2(P_{ABC} - P_{HBC}).$$



Slično je i

$$b|BH| = 2(P_{ABC} - P_{HCA}),$$
$$c|CH| = 2(P_{ABC} - P_{HAB}).$$

Kako je $P_{HBC} + P_{HCA} + P_{HAB} = P_{ABC} = P$ i $P_{ABC} = s\cdot\rho$, (ρ je polumjer upisane kružnice trokutu ABC i s poluopseg trokuta ABC) imamo:

$$a|AH| + b|BH| + c|CH| = 4P_{ABC} = 4s\rho.$$

Sada danu nejednakost možemo zapisati u obliku

$$\frac{a}{|AH|} + \frac{b}{|BH|} + \frac{c}{|CH|}$$
$$\geqslant \frac{s^2}{P} = \frac{s}{\rho} = \frac{4s^2}{a|AH| + b|BH| + c|CH|}.$$

Nakon sređivanja imamo

$$Q = a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{|AH|}{|BH|} + \frac{|BH|}{|BH|}\right)$$

$$+ac\left(\frac{|CH|}{|AH|}+\frac{|AH|}{|CH|}\right)+bc\left(\frac{|CH|}{|BH|}+\frac{|BH|}{|CH|}\right)$$
$$\geqslant 4s^2.$$

Za pozitivne x, y vrijedi $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $x=y$.

Sada je

$$Q \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$=(a+b+c)^2=4s^2$$

(jednakost vrijedi ako i samo ako je $|AH|=|BH|=|CH|$, tj. ako je trokut jednakostraničan).

Kako je ova nejednakost ekvivalentna zadanoj dokaz je gotov.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3061. *Kolika je vjerojatnost da se kod slučajnog izbora slova iz riječi "matematika" dobiju slova kojima se može sastaviti riječ "matka"?*

Rješenje. Pet slova mogu se izabrati na $\binom{10}{5}$ načina, od čega su povoljni oni kod kojih su izabrana dva slova 'a', jedno 't', jedno 'm', jedno 'k'. Dva slova 'a' se između tri 'a' iz 'matematika' mogu uzeti na $\binom{3}{2}$ načina, a za svaki od tih načina se mogu uzeti $\binom{2}{1}$ 't', a za svaki od tih $\binom{2}{1}$ 'm' i 'k' se može uzeti samo na jedan način. Dakle vjerojatnost je

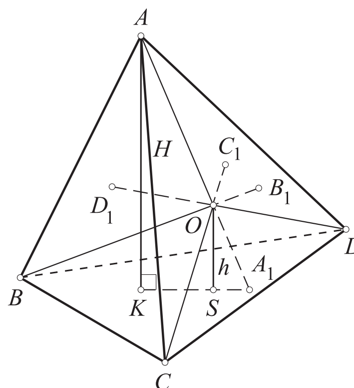
$$V=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{5}}=\frac{12}{252}=\frac{1}{21}\approx 4.76\%.$$

Vedran Rafaelić (4), Buje

3062. *Dokaži da se iz svake točke O unutar tetraedra $ABCD$ mogu povući dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$ (pri čemu su točke A_1, B_1, C_1, D_1 na stranama nasuprot vrhova A, B, C, D), tako da vrijedi nejednakost*

$$\frac{|AO|}{|OA_1|}+\frac{|BO|}{|OB_1|}+\frac{|CO|}{|OC_1|}+\frac{|DO|}{|OD_1|}\geq 12.$$

Rješenje. Kroz točku O i B povucimo pravac koji siječe ravninu, trokut BCD, u točki A_1. Analogno za ostale točke.



Dokažimo da točke A_1, B_1, C_1, D_1 zadovoljavaju danu nejednakost. Iz točke A povucimo visinu tetraedra, iz točke O okomicu na ravninu BCD. $|AK|=H$ je visina tetraedra iz A, a $|OS|=h$ visina tetraedra $BCDO$.

Na osnovu Talesova poučka imamo:

$$|AA_1|:H=|OA_1|:h$$
$$\iff \frac{|AA_1|}{|OA_1|}=\frac{H}{h}$$
$$\iff \frac{|AO|+|OA_1|}{|OA_1|}=\frac{H}{h}$$
$$\iff \frac{|AO|}{|OA_1|}=\frac{H}{h}-1,\quad \frac{H}{h}=\frac{V_{ABCD}}{V_{BCDO}}$$
$$\implies \frac{|AO|}{|OA_1|}=\frac{V_{ABCD}}{V_{BCDO}}-1.$$

Analogno se dobije za ostale:

$$\frac{|BO|}{|OB_1|}=\frac{V_{ABCD}}{V_{ACDO}}-1,$$
$$\frac{|CO|}{|OC_1|}=\frac{V_{ABCD}}{V_{ABDO}}-1,$$
$$\frac{|DO|}{|OD_1|}=\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCO}}-1.$$

Zbrajajući dane jednakosti dobivamo:

$$\frac{|AO|}{|OA_1|}+\frac{|BO|}{|OB_1|}+\frac{|CO|}{|OC_1|}+\frac{|DO|}{|OD_1|}$$

$$= \left(\frac{1}{V_{ACDO}} + \frac{1}{V_{ABDO}} + \frac{1}{V_{ABCO}} + \frac{1}{V_{BCDO}} \right) \cdot V_{ABCD} - 4$$

$$\overset{A_4 \geqslant H_4}{\geqslant} \frac{16}{V_{ACDO} + V_{ABDO} + V_{ABCO} + V_{BCDO}} \cdot V_{ABCD} - 4$$

$$= V_{ABCD} \cdot \frac{16}{V_{ABCD}} - 4 = 12.$$

Haris Čaušević (3),
Treća gimnazija, Sarajevo, BiH

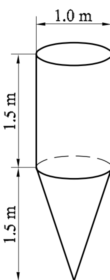
D) Rješenja iz fizike

OŠ – 262. *Drveni kvadar pliva na vodi. Kad se atmosferski tlak smanji hoće li on više ili manje uroniti u vodu? Ili će ostati jednako uronjen? Obrazložite odgovor.*

Rješenje. Kvadar će ostati jednako uronjen jer uzgon ne ovisi o tlaku, već o obujmu uronjenog dijela tijela i gustoći tekućine u koju je tijelo uronjeno.

Ur.

OŠ – 263. *Vodeni spremnik se puni vodom protokom od 0.75 litara u sekundi. Koliko vremena treba da se on napuni? Oblik i dimenzije spremnika su prikazani na slici.*



Rješenje.

$r_{\text{valjka}} = r_{\text{stošca}} = 0.5$ m

$h_{\text{valjka}} = h_{\text{stošca}} = 1.5$ m

$v = 0.75 \ \frac{\text{l}}{\text{s}}$

$t = ?$

$$V_{\text{valjka}} = r^2 \cdot \pi \cdot h = (0.5 \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 1.5 \text{ m} = 1.178 \text{ m}^3,$$

$$V_{\text{stošca}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{(0.5 \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 1.5}{3} \text{ m} = 0.393 \text{ m}^3,$$

$$V_{\text{ukupan}} = 1.571 \text{ m}^3 = 1571 \text{ l},$$

$$t = \frac{V}{v} = \frac{1571 \text{ l}}{0.75 \text{ l/s}} = 2094.7 \text{ s}.$$

Anton Matija Ovčar (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 264. *Dječak mase 50 kg se spušta po cesti dugoj 400 m na koturaljkama koristeći djelovanje sile teže. Cesta se spušta za 10 metara. Sila trenja prosječno iznosi 2.5 N. Koliko vremena bi trebalo dječaku da prođe cijelu cestu i koliku brzinu bi imao na kraju kad ne bi kočio?*

Rješenje.

$m = 50$ kg, $\quad l = 400$ m

$h = 10$ m, $\quad F_{tr} = 2.5$ N

$t = ? \qquad v = ?$

Na dječaka bi na kosini, da nema trenja, djelovala sila:

$$F = \frac{G \cdot h}{l} = \frac{m \cdot g \cdot h}{l} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 10 \text{ m}}{400 \text{ m}} = 12.5 \text{ N}.$$

Ukupna sila na dječaka iznosi:

$$F_{\text{ukupno}} = F - F_{tr} = 12.5 \text{ N} - 2.5 \text{ N} = 10 \text{ N}.$$

Pretpostavljamo da se dječak giba jednoliko ubrzano i da ima ubrzanje:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = 0.2 \text{ m/s}^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \text{ m}}{0.2 \text{ m/s}^2}} = 63.25 \text{ s}$$

$$v = a \cdot t = 0.2 \text{ m/s}^2 \cdot 63.25 \text{ s} = 12.65 \text{ m/s}.$$

Ur.

OŠ – 265. *Korisnost alkoholne grijalice je oko 20%. Koliko alkohola ona potroši dok zakuha litru vode početne temperature 20 °C? Specifična toplina izgaranja alkohola je 27 MJ/kg.*

Rješenje.

$\eta = 20\% = 0.2, \quad V = 1$ l

$t_{\text{poč}} = 20\,^\circ\text{C}, \quad t_{\text{kon}} = 100\,^\circ\text{C},$

$c_{\text{vode}} = 4200 \ \frac{\text{J}}{\text{kg}\,^\circ\text{C}}$

$q_{\text{alk}} = 27 \ \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$

$m_{\text{alk}} = ?$

Da bi zagrijali litru vode na 20 °C treba joj dovesti toplinu

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta t = 4200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\ ^\circ\mathrm{C}} \cdot 1\ \mathrm{kg} \cdot 80\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$= 336\,000\ \mathrm{J},$$

$$Q_{\text{ukupno}} = \frac{Q}{\eta} = \frac{336\,000\ \mathrm{J}}{0.2} = 1\,680\,000\ \mathrm{J},$$

$$m_{\text{alk}} = \frac{Q_{\text{ukupno}}}{q_{\text{alk}}} = \frac{1\,680\,000\ \mathrm{J}}{27\,000\,000\ \mathrm{J/\,kg}} = 0.062\ \mathrm{kg}$$

$$= 62\ \mathrm{g}.$$

Iva Popović (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1364. *Koliki je omjer iznosa okomitog i tangecijalnog ubrzanja točke na rubu rotirajućeg kotača u trenutku kad vektor ukupnog ubrzanja te točke zatvara kut od* 30° *s vektorom linearne brzine?*

Rješenje.

$\alpha = 30^\circ$

a_{cp} – okomito ubrzanje

a_t – tangencijalno ubrzanje

a – ukupno ubrzanje

$\frac{a_{cp}}{a_t} = ?$

Vrijedi:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_t}{a} \implies a_t = a\cos\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{a_{cp}}{a} \implies a_{cp} = a\sin\alpha.$$

Omjer ubrzanja je:

$$\frac{a_{cp}}{a_t} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.58.$$

Marko Čolić (4),
III. gimnazija, Osijek

1365. *Lonac cilindričnog oblika bez poklopca mase 1 kg i volumena* 0.01 *m*^{3} *pluta na vodi (gustoće* 1000 *kg/m*^{3}*) u uspravnom požaju s otvorom prema gore. Koliki je dio volumena lonca uronjen u vodu? Koliko je pijeska gustoće* 3000 *kg/m*^{3} *potrebno sipati u lonac da bi potonuo u vodi?*

Rješenje.

$m_{\text{lonac}} = 1\ \mathrm{kg}, \quad V_{\text{lonac}} = 0.01\ \mathrm{m}^3$

$\rho_{H_2O} = 1000\ \mathrm{kg/\,m}^3, \quad \rho_{\text{pijesak}} = 3000\ \mathrm{kg/\,m}^3$

a) $V_{\text{uronjeno}} = ?$ b) $V_{\text{pijesak}} = ?$

a) Kada lonac pluta, njegova težina jednaka je sili uzgona, odnosno:

$$F_g = F_{\text{uz}},$$

$$m_{\text{lonac}} g = \rho_{H_2O} V_{\text{uronjeno}} g,$$

$$V_{\text{uronjeno}} = \frac{m_{\text{lonac}}}{\rho_{H_2O}} = 0.001\ \mathrm{m}^3,$$

$$V_{\text{uronjeno}} = \frac{1}{10} V_{\text{lonac}}.$$

Dakle, 10% volumena lonca je uronjeno u vodi.

b) Da bi lonac potonuo u vodi, težina lonca i pijeska mora biti veća od sile uzgona, odnosno:

$$F_g > F_{\text{uz}},$$

$$(m_{\text{lonac}} + m_{\text{pijesak}}) g > \rho_{H_2O} V_{\text{lonac}} g,$$

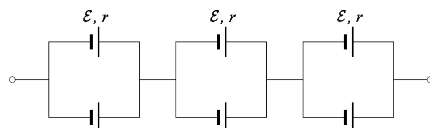
$$m_{\text{pijesak}} > \rho_{H_2O} V_{\text{lonac}} - m_{\text{lonac}} = 9\ \mathrm{kg},$$

$$V_{\text{pijesak}} = \frac{m_{\text{pijesak}}}{\rho_{\text{pijesak}}} > 0.003\ \mathrm{m}^3.$$

Da bi lonac potonuo u vodi, potrebno je usipati količinu pijeska koja je veća od 30% volumena lonca, odnosno više od 9 kg pijeska.

Vanja Ubović (1), Virovitica

1366. *Elektromotorna sila jedne baterije je* e*, a njezin unutarnji otpor* r*. Promotrimo sada spoj u kojem je u seriju spojeno* m *grupa po* k *baterija spojenih u paralelu unutar pojedine grupe (vidi sliku za poseban slučaj* $m = 3$ *i* $k = 2$*). Pronađite elektromotornu silu i unutarnji otpor tako dobivene baterije.*



Rješenje. Koristeći formule za serijski i paralelni spoj baterija lako se rješava zadatak.

Prvo nađimo elektromotornu silu (ukupnu) te ukupni unutarnji otpor k baterija spojenih u

paralelu:

$$\varepsilon_p = \varepsilon, \quad r_p = \frac{r}{k}.$$

Sada nam je ekvivalentna shema m baterija, svaka elektromotorne sile ε i unutarnjeg otpora $\frac{r}{k}$, spojenih u seriju. Dalje, koristeći formule za serijski spoj baterija, imamo za ukupnu traženu elektromotornu silu ε_{uk}, te za ukupni traženi unutarnji otpor r_{uk}, sljedeće:

$$\varepsilon_{uk} = m\varepsilon_p \implies \varepsilon_{uk} = m\varepsilon,$$

$$r_{uk} = mr_p \implies r_{uk} = \frac{m}{k}r.$$

Dakle, ukupna tražena elektromotorna sila m puta je veća od svake pojedine baterije, a ukupni traženi unutarnji otpor veći je od unutarnjeg otpora svake pojedine baterije $\frac{m}{k}$ puta.

Marko Čolić (4), Osijek

1367. *Jedna vodljiva žica ima dva puta veći električni otpor od druge. Koja će oslobađati više topline u a) paralelnom, odnosno b) serijskom spoju ako su obje žice spojene na izvor istosmjerne električne struje?*

Rješenje.

$$\underline{R_1 = 2R_2}$$

a) U paralelnom spoju napon je jednak na oba otpora i neka iznosi U. Za ukupni otpor u paralelnom spoju vrijedi:

$$R_{uk} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2},$$

pri čemu je R_1 otpor prve, R_2 otpor druge žice, a R_{uk} otpor spoja. Prema Ohmovom zakonu jakost struje u prvoj žici je:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{U}{2R_2},$$

a jakost struje u drugoj žici:

$$I_2 = \frac{U}{R_2}.$$

Snaga prvog vodiča je:

$$P_1 = UI_1 = \frac{U^2}{2R_2},$$

a snaga drugog vodiča:

$$P_2 = UI_2 = \frac{U^2}{R_2}.$$

Vidimo da je $P_2 > P_1$. U paralelnom spoju više topline oslobađa druga žica.

b) U serijskom spoju jakost električne struje u cijelom spoju je jednaka i iznosi I. Prema Ohmovom zakonu za otpor prve žice vrijedi:

$$R_1 = \frac{U_1}{I},$$

pri čemu je U_1 napon na prvoj žici.

Analogno za drugu žicu vrijedi:

$$R_2 = \frac{U_2}{I}.$$

Snaga prvog vodiča je:

$$P_1 = U_1I = 2R_2I^2,$$

a snaga drugog vodiča:

$$P_2 = U_2I = R_2I^2.$$

U serijskom spoju više topline oslobađa prva žica.

Gabrijel Guberović (3),
Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška

1368. *Živa ($\rho_{\text{Hg}} = 13\,600$ kg/m^3) se nalazi u staklenoj cijevi kao na slici tako da je ukupan stupac duljine 20 cm. Cijev se malo protrese tako da živa počinje titrati oko ravnotežnog položaja. Kolika je frekvecija i period titranja?*

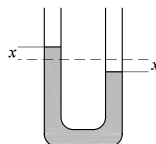
Rješenje.

$l = 20$ cm $= 0.2$ m

$\rho_{\text{Hg}} = 13\,600$ kg/ m^3

$\underline{g = 9.81 \text{ m/ s}^2}$

$f,\ T = ?$



Neka je x otklon od ravnotežnog položaja kao na slici.

Sila koja djeluje na živu je:

$$F = \rho_{Hg}g \cdot \Delta V = \rho_{Hg}gS \cdot 2x,$$

gdje je S poprečni presjek cijevi. Sila je proporcionalna otklonu $(F = kx)$ i stoga:

$$k = 2\rho_{\text{Hg}}gS.$$

Masa živinog stupca na koji djeluje sila je

$$m = \rho_{\text{Hg}}V = \rho_{\text{Hg}}Sl.$$

Period titranja harmoničkog oscilatora je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} = 0.63\,\text{s}.$$

Frekvencija titranja je $f = \frac{1}{T} = 1.6\,\text{Hz}$.

Marko Čolić (4), Osijek

1369. *Nabijena čestica ulijeće u područje u kojem djeluju homogeno električno polje jakosti E i homogeno magnetsko polje indukcije B. Smjer električnog polja je okomit na smjer magnetskog, a smjer gibanja nabijene čestice je okomit na oba polja. Ako čestica prolazi bez otklanjanja, kolika je njezina brzina? Da li je moguće odrediti naboj čestice gore navedenim eksperimentom?*

Rješenje. Pošto je sila uslijed djelovanja magnetskog polja okomita i na smjer gibanja čestice i na smjer magnetskog polja, ona će ležati na istom pravcu kao i električna sila, paralelno silnicama električnog polja. Da bi čestica imala pravocrtno gibanje, sile koje na nju djeluju moraju se poništavati pa vrijedi:

$$F_{el} = F_{mag}, \qquad Eq = Bvq,$$

pri čemu je F_{el} električna sila na česticu, F_{mag} magnetska sila, q naboj, a v brzina čestice.

Dalje vrijedi $E = Bv$, tj. $v = \dfrac{E}{B}$. Brzina čestice iznosi $\dfrac{E}{B}$. Iz ovoga vidimo da se tim eksperimentom ne može odrediti naboj čestice jer naboj ne utječe na to da li se čestica otklanja ili ne.

Gabrijel Guberović (3), Nova Gradiška

1370. *Mala idealno absorbirajuća pločica mase 10 mg obješena je o nit duljine 20 mm i zanemarive mase. Bljesak laserske svjetlosti pada okomito na površinu pločice i otklanja je za kut od* 0.6°. *Odredite energiju laserskog bljeska.*

Rješenje.

$m = 10$ mg, $\quad l = 20$ mm, $\quad \alpha = 0.6^\circ$

$E_{\text{laser}} = ?$

Laserski bljesak energije E_{laser} ima impuls $p_{\text{laser}} = \dfrac{E_{\text{laser}}}{c}$, gdje je c brzina svjetlosti.

Budući da se laserska svjetlost u potpunosti apsorbira u pločici, zakon očuvanja impulsa daje: $mv_{\text{pl}} = p_{\text{laser}}$ tj. $v_{\text{pl}} = \dfrac{p_{\text{laser}}}{m}$, gdje je v_{pl} brzina pločice u početnom položaju.

Pločica se otkloni za kut α i pritom se početna kinetička energija pločice pretvori u potencijalnu $\dfrac{mv_{\text{pl}}^2}{2} = mgl(1 - \cos\alpha)$ odnosno

$$v_{\text{pl}} = \sqrt{4gl\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Energija laserskog bljeska je:

$$E_{\text{laser}} = mv_{\text{pl}}c = mc\sqrt{4gl\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 13.9\,\text{J}.$$

Ur.

Rješenja zabavne matematike

Magični kvadrat 5x5

Zbroj prvih 25 prirodnih brojeva je 325, pa je zbroj brojeva u svakom retku, u svakom stupcu i na obje dijagonale petina toga zbroja, tj. 65. Vidite crtež!

18	24	5	6	12
10	11	17	23	4
22	3	9	15	16
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25

Dogodilo se ovog ljeta

Najprije su se prebacile prve tri djevojke, a vratila se treća djevojka. Zatim su se opet prebacile tri djevojke, a vratile četvrta i peta djevojka. Slijedilo je prebacivanje prvih triju mladića i vraćanje trećeg para. Zatim su se opet prebacila tri mladića, a vratila druga djevojka. Slijedilo je prebacivanje druge, treće i četvrte djevojke i vraćanje petog mladića po svoju djevojku. Kraj priče!

Formula 1

Treba promatrati sve parove automobilista (**AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE**) i ispitivati koji je od njih na svojemu mjestu u prvoj prognozi. Konačan poredak je **D A B E C**.

Zagonetni račun

Početak je očigledan: znamenka M mora biti 4. Tražena vrijednost je MONOM = 47274.

Susjedi

Vidite crtež!

E
G K
R A U
O T P S

48. međunarodna matematička olimpijada

Od 19. do 31. srpnja 2007. godine održana je 48. po redu Međunarodna matematička olimpijada u Hanoiu, glavnom gradu Vijetnama. To je međunarodno natjecanje koje se održava svake godine i okuplja mlade matematičare iz cijelog svijeta.

Na natjecanju je sudjelovalo 520 učenika iz ukupno 95 zemalja iz svih krajeva svijeta (među kojima su Kuvajt i Ujedinjeni Arapski Emirati bili promatrači). Hrvatsku je predstavljalo 6 učenika koji su svoj plasman izborili na državnom natjecanju u Krku. To su: *Nikola Adžaga, Petar Sirković, Saša Stanko* (V. gimnazija u Zagrebu), *Luka Rimanić, Luka Žunić* (Gimnazija Andrije Mohorovičića u Rijeci) i *Antonio Krnjak* (Gimnazija Čakovec u Čakovcu), svi učenici 4. razreda. Voditelji ekipe bili su Željko Hanjš s Matematičkog odjela Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta te Ilko Brnetić s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Za učenike su bile organizirane pripreme u trajanju od tri tjedna.

Voditelj Željko Hanjš na put je krenuo 18. srpnja te je sudjelovao u odabiru zadataka koji će biti postavljeni na natjecanju. Učenici su zajedno s voditeljem Ilkom Brnetićem na put krenuli tri dana kasnije. Put se sastojao od leta iz Zagreba za London, zatim dvanaestosatnog leta do Hong Konga i, konačno, leta za Hanoi. Smještaj za učenike bio je organiziran u La Than Hotelu. Dan nakon dolaska bilo je svečano otvaranje, a sljedeća dva dana uslijedilo je i samo natjecanje. U svakom od ta dva dana učenici su rješavali tri zadatka u vremenu od četiri i pol sata. Idućih dana organizirana su razna sportska natjecanja kao i nekoliko izleta. Posjetili smo Dam Long te zaljev Ha Long. Začudili smo se načinu na koji se odvija promet u samom gradu. Naime, motocikl je glavno prijevozno sredstvo, a glavno sredstvo signalizacije jest truba. Budući da se sve odvija bez strogih prometnih pravila, bilo je vrlo “zanimljivo” prelaziti preko ceste.

Ubrzo nakon koordinacije saznali smo i rezultate. Ukupno je podijeljeno 253 medalja, od toga 39 zlatnih, 83 srebrnih i 131 brončana, te 149 pohvala. Od naših učenika, *Petar Sirković* i *Antonio Krnjak* osvojili su brončane medalje dok su *Nikola Adžaga, Saša Stanko, Luka Rimanić* i *Luka Žunić* osvojili pohvale.

Zahvala Ministarstvu znanosti, obrazovanja i športa čijom potporom je omogućeno sudjelovanje Hrvatske na olimpijadi te zahvala voditeljima i svima ostalima koji su sudjelovali u pripremama s ciljem postizanja što boljeg rezultata hrvatske olimpijske ekipe.

Antonio Krnjak, član olimpijske ekipe

Rang–lista

	nagrade				broj		nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.		I	II	III	poh.	bod.
Rusija	5	1			184	Armenija		1	1	4	73
Kina	4	2			181	Macau		1	1	4	73
Južna Koreja	2	4			168	Izrael			3	3	71
Vijetnam	3	3			168	Novi Zeland			3	2	71
SAD	2	3	1		155	Azerbajdžan			3	1	69
Japan	2	4			154	Bosna i Hercegovina		1		5	69
Ukrajina	3	1	2		154	Indonezija		1		4	69
Sjeverna Koreja	1	4		1	151	Makedonija			3	1	68
Bugarska	2	2	2		149	Nizozemska			1	3	65
Tajvan	2	3	1		149	Estonija			1	4	64
Rumunjska	1	4	1		146	Albanija			1	5	59
Hong Kong	2	3	1		143	Švicarska			1	3	59
Iran	1	3	2		143	Latvija				4	58
Tajland	1	3	2		133	Finska		1		2	55
Njemačka	1	3	1	1	132	Portugal			1	1	52
Mađarska		5		1	129	Irska			1	3	51
Turska	1	2	2	1	124	Turkmenistan				5	51
Poljska	1	2	2		122	Danska			1	3	50
Bjelorusija	1	1	4		119	Španjolska			2	1	48
Moldavija		1	3	1	118	Kirgistan (5)			1	3	43
Italija	1	1	3	1	116	Južnoafrička Republika				4	42
Australija	1		4	1	110	Cipar				2	41
Srbija	1		4		107	Trinidad i Tobago				3	39
Brazil		2	3	1	106	Tadžikistan			1	2	37
Indija		3		3	103	Kostarika			1	1	36
Gruzija	1	1	1	3	102	Island				1	35
Kanada		1	3	1	98	Ekvador			1	2	34
Kazahstan		1	3	2	95	Luksemburg (3)			1	2	34
Slovenija			5	1	95	Malezija			1	2	34
Ujedinjeno Kraljevstvo	1		3	2	95	Salvador (4)				3	34
Kolumbija		1	3	1	93	Pakistan			1	1	32
Litva	1		2	1	92	Paragvaj (4)				3	32
Peru		1	2	3	91	Bangladeš (5)				3	31
Mongolija		2	1	3	88	Maroko				2	28
Uzbekistan		1	3	2	88	Kambodža (4)				3	26
Singapur			5		87	Šri Lanka				1	25
Meksiko			4	2	86	Filipini				1	21
Slovačka			4	2	86	Nigerija				1	20
Grčka		1	3	2	84	Crna Gora (3)				1	17
Češka			5	1	82	Kuba (1)			1		16
Švedska			4	2	81	Lihtenštajn (2)			1		14
Austrija		1	3		80	Venecuela (3)					14
Francuska	1		2		79	Portoriko (3)					7
Norveška		1	1	1	79	Saudijska Arabija					5
Belgija			3	2	78	Čile (4)					4
Hrvatska			2	4	76	Bolivija (2)					2
Argentina		1	1	3	75						

Zadaci

Prvi dan

Hanoi, Vijetnam, srijeda, 25. srpnja 2007.

1. Dani su realni brojevi a_1, a_2, ..., a_n. Za svako i ($1 \le i \le n$), definirano je

$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\} \quad \text{i}$$

$$d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}.$$

a) Dokaži da za svake realne brojeve $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, vrijedi

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

b) Pokaži da postoje realni brojevi $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ takvi da u $(*)$ vrijedi jednakost.

(Novi Zeland)

2. Promatraj pet točaka A, B, C, D i E takvih da je $ABCD$ paralelogram a $BCED$ tetivni četverokut. Neka je ℓ pravac koji prolazi točkom A. Pretpostavi da ℓ siječe dužinu $\overline{CD}$ u unutrašnjoj točki F i pravac BC u G, te da je $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokaži da je ℓ simetrala kuta DAB.

(Luksemburg)

3. Na matematičkom natjecanju neki natjecatelji su prijatelji. Prijateljstvo je uzajamno obostrano. Grupu natjecatelja zvat ćemo *družina* ako su svaka dva među njima prijatelji. (Specijalno, grupa s manje od dva natjecatelja je družina.) Broj članova družine zvat ćemo njezinom *veličinom*.

Ako je na tom natjecanju najveća veličina družine paran broj, dokaži da se natjecatelji mogu smjestiti u dvije prostorije tako da najveća veličina družinâ u jednoj prostoriji bude jednaka najvećoj veličini družinâ u drugoj.

(Rusija)

Drugi dan

Hanoi, Vijetnam, srijeda, 26. srpnja 2007.

4. U trokutu ABC simetrala kuta BCA siječe opisanu mu kružnicu ponovo u točki R, simetralu stranice $\overline{BC}$ u P, a simetralu stranice $\overline{AC}$ u Q. Polovište stranice $\overline{BC}$ je K, a polovište stranice $\overline{AC}$ je L. Dokaži da su površine trokuta RPK i RQL jednake.

(Češka)

5. Neka su a i b pozitivni cijeli brojevi. Dokaži da ako je $(4a^2 - 1)^2$ djeljivo s $4ab - 1$, tada je $a = b$.

(Ujedinjeno Kraljevstvo)

6. Neka je n pozitivan cijeli broj. Promatraj

$$S = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ x + y + z > 0\}$$

kao skup od $(n+1)^3 - 1$ točaka u trodimenzionalnom prostoru. Odredi najmanji mogući broj ravnina, čija unija sadrži sve točke skupa S, ali ne sadrži točku $(0, 0, 0)$.

(Nizozemska)

Međunarodni turnir mladih fizičara

Učenici V. gimnazije u Zagrebu, sudionici turnira

Međunarodni turnir mladih fizičara (**IYPT** – *International Young Physicist's Tournament*) je međunarodno ekipno natjecanje učenika srednjih škola iz fizike. Svake godine, po završetku Turnira, objavi se sedamnaest fizikalnih problema koje treba eksperimentalno istražiti i teorijski objasniti. IYPT se razlikuje od većine natjecanja na koje su učenici navikli. Nakon objave problema budući natjecatelji imaju gotovo godinu dana da ih obrade što bolje mogu. Rad nalikuje znanstvenom istraživanju. Problemi su zadani tako da se ne očekuje konačan odgovor. Uvijek je moguće dublje razumjeti problem i istražiti ga na višoj razini. Dozvoljeno je koristiti svu dostupnu literaturu, kao i konzultirati se sa znanstvenicima. To često nije dovoljno jer problemi zahtijevaju kreativnost, osmišljavanje objašnjenja fenomena i prikladnih aparatura, timski rad, upornost i prije svega volju za radom.

Hrvatska je na Turniru sudjelovala sedam puta, a najznačajniji rezultat do sada je postignut 2006. godine u Bratislavi, kada je hrvatska ekipa osvojila prvo mjesto.

Ove godine Turnir je bio održan u Seoulu. Ekipa u sastavu *Luka Božić, Marija Došlić, Ivan Sudić, Veronika Sunko* i *Vilim Štih*, osvojila je dvanaesto mjesto u konkurenciji 22 države. Za razliku od proteklih godina, sudjelovao je i učenik koji ne pohađa školu u Zagrebu. Zadovoljni smo uspjehom s obzirom na to da je došlo do smjene generacija. Nova je ekipa tako stekla korisna iskustva. Nadamo se da će nam to pomoći da 2008. godine ostvarimo još bolji rezultat na turniru koji će se održati u Trogiru od 21. do 28. svibnja. Htjeli bismo zahvaliti svima koji su nam pomogli u pripremama za ovogodišnji Turnir.

Zadnjih godina rad za IYPT intenzivno se odvijao u Petoj gimnaziji. Tijekom priprema napravljeno je i nabavljeno mnogo opreme koja će pomoći u daljnjem radu. Također, od ove godine na raspolaganju nam je i prostorija namijenjena isključivo radu za Turnir. Ako vas je ovo zainteresiralo, svakako nam se javite ili nas posjetite u Petoj gimnaziji.

Postavljeni problemi za Turnir IYPT u 2008. godini.

1. **Tipcat.** Place a small wooden stick over the edge of a desk. Hit the end of the stick overhanging the table so that it flies away. How is the flight distance related to the relevant parameters? What is the condition for a maximum horizontal distance?
2. **Winged seed.** Investigate the motion of falling winged seeds such as those of the maple tree.
3. **Pin-hole Camera.** Study the characteristics of a pin-hole camera and find the conditions for the camera to achieve optimum image quality.
4. **Cymbal.** Discharging an electronic flash unit near a cymbal will produce a sound from the cymbal. Explain the phenomenon and investigate the relevant parameters.

5. **Voltaic cell.** Make a voltaic cell using paper tissues as a salt bridge. Study and explain how the electromotive force of this battery depends on time.
6. **Liquid stain.** When a drop of liquid such as coffee dries on a smooth surface, the stain usually remains at the edge of the drop. Investigate why the stain forms at the edge and what parameters affect the characteristics of the stain.
7. **Making a Splash.** A solid object is dropped into water from a height of 50 cm. Investigate the factors that would minimize the splash.
8. **Astroblaster.** When a large ball is dropped, with a smaller one stacked on top of it, onto a hard surface, the smaller ball will often rise much higher than it would if dropped onto the same surface by itself while the larger ball hardly bounces at all. Investigate this phenomenon and design a multiple-ball system, using up to 4 balls, that will reach the greatest elevation of the top ball.
9. **Flute.** Drill a hole into the side of a tube that is open at one end and produce a sound by blowing the open end. Investigate the pitch and timbre of the sound of your flute and how they depend on the position and the diameter of the hole.
10. **Kaye Effect.** When a thin stream of shampoo is poured onto a surface, a small stream of liquid occasionally leaps out. This effect lasts less than a second but occurs repeatedly. Investigate this phenomenon and give an explanation.
11. **Gutter.** When a thin layer of water flows along an inclined gutter different wave patterns are sometimes observed. Study this phenomenon.
12. **Geyser.** Support long, vertical tube containing water. Heat the tube directly from the bottom and you will observe that the water erupts. Arrange for the water to drain back into the tube to allow repeated eruptions. Investigate the parameters that affect the time dependence of the process.
13. **Spinning ice.** Pour very hot water into a cup and stir it so the water rotates slowly. Place a small ice cube at the centre of the rotating water. The ice cube will spin faster than the water around it. Investigate the parameters that influence the ice rotation.
14. **Faraday Generator.** Construct a homopolar electric generator. Investigate the electrical properties of the device and find its efficiency.
15. **Gelation.** Hot gelatine solution becomes a gel upon cooling. Investigate the electric conductivity as a function of temperature as it gels. Explain the results obtained.
16. **Black spoon.** Blacken a spoon using a candle flame. If you immerse the spoon in water it appears glossy. Investigate the phenomenon and determine the optical properties of such a "mirror."
17. **Heat engine.** Build a heat engine powered only by the difference between the day and night air temperatures without using direct sunlight. Determine its efficiency.

Međunarodno matematičko natjecanje “Klokan bez granica” 2007. g.



Natjecanje *Klokan bez granica* održano je po deveti put pod pokroviteljstvom Ministarstva prosvjete i športa i Hrvatskog matematičkog društva 15. ožujka ove godine. U isto vrijeme s približno istim zadacima natjecalo se 4 000 000 učenika u 38 zemalja svijeta, što ovo natjecanje čini najvećim školskim natjecanjem. Prema odjecima koji su stigli do nas, vjerujemo da je natjecanje postiglo svoju svrhu i zainteresiralo učenike za rješavanje zadataka iz matematike.

Ove godine natjecanje se proširilo na **125** srednjih škola u svim županijama. U I. razredima srednje škole, sudjelovalo je **1969** učenika (**Cadet**), u II. i III. razredima **2964** učenika (**Junior**) i **900** učenika (**Student**) IV. razreda srednje škole. Ukupno je sudjelovalo **4833** učenika srednjih škola, a ako se pribroji i 290 osnovnih škola, onda se ukupno natjecalo **28 168** učenika u Hrvatskoj..

Bodovni prag najboljih 10% sudionika je bio: za “Cadet” – 66.25; “Junior” – 60.50; “Junior” – matematički program 70.50; “Student “ 57.25; “Student” – matematički program 71.75 bodova.

Kako bi se bolje upoznali sa zadacima i po želji uključili u navedeno natjecanje, slijede zadaci s rješenjima na ovogodišnjem natjecanju.

U ime povjerenstva najtoplije se zahvaljujem na sudjelovanju.

Sljedeće natjecanje će biti održano **10. travnja 2008. godine,** s početkom u **12 sati i 30 minuta. Detaljne obavijesti dobiti ćete dopisom na škole prvi radni dan drugog polugodišta.**

Prijave za natjecanje primaju se do **1. veljače 2008. godine na adresu HMD Bijenička cesta 30 ili na tel: 01/4605708**

Slijede zadaci s prošlogodišnjeg natjecanja.

Koordinator matematičkog natjecanja Neda Lukač, prof.

Zadaci za učenike 8. razreda osnovne škole i 1. razreda srednje škole (Cadet)

1. $\dfrac{2007}{2+0+0+7} =$

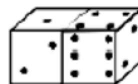
A. 1003 **B.** 75 **C.** 223 **D.** 213 **E.** 123

2. Grmovi ruža posađeni su s obje strane staze. Udaljenost susjednih grmova iznosi

A. 22 **B.** 20 **C.** 12 **D.** 11 **E.** 10

3. Koliki je zbroj točkica na stranama kocke koje nisu vidljive?

A. 15 **B.** 12 **C.** 7 **D.** 27 **E.** drugi odgovor



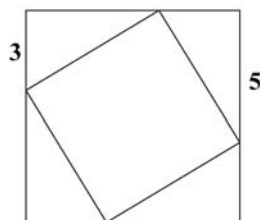
4. U koordinatnom sustavu označene su točke $A(2006, 2007)$, $B(2007, 2006)$, $C(-2006, -2007)$, $D(2006, -2007)$ i $E(2007, -2006)$. U horizontalnom položaju

nalazi se pravac

A. AD **B.** BE **C.** BC **D.** CD **E.** AB

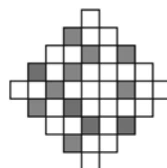
5. Manji je kvadrat upisan u veći kao što prikazuje slika. Kolika je površina manjeg kvadrata?

A. 16 **B.** 28 **C.** 34 **D.** 36 **E.** 49



6. Koliko još najmanje kvadratića treba osjenčati da bi lik na slici postao osnosimetričan?

A. 4 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 2 **E.** 3



7. Broj je palindrom ako se jednako čita s obje strane, npr. broj 13931 je palindrom. Kolika je razlika između najvećeg šesteroznamenkastog i najmanjeg peteroznamenkastog palindroma?

A. 989989 **B.** 989998 **C.** 998998 **D.** 999898 **E.** 999988

8. Na slici je šest sukladnih krugova. Krugovi se dodiruju međusobno i oni dodiruju stranice većeg pravokutnika. Vrhovi manjeg pravokutnika su u središtima četiriju krugova. Ako je opseg manjeg pravokutnika 60 cm, koliki je opseg većeg pravokutnika?

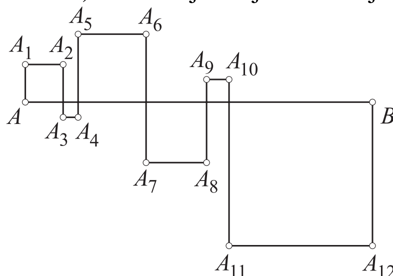


A. 160 cm **B.** 140 cm **C.** 120 cm **D.** 100 cm **E.** 80 cm

9. Broj x je negativan cijeli broj. Koji je od brojeva najveći?

A. $x+1$ **B.** $2x$ **C.** $-2x$ **D.** $6x+2$ **E.** $x-2$

10. Kvadrati na slici nastali su presijecanjem dužine $\overline{AB}$ duljine 24 cm izlomljenom linijom $AA_1A_2\ldots A_{12}$ (vidi sliku). Kolika je duljina izlomljene linije $AA_1A_2\ldots A_{12}$?



A. 48 cm **B.** 72 cm **C.** 96 cm **D.** 56 cm **E.** 106 cm

11. Na usporednim pravcima x i y istaknuto je 6 točaka. Pri tome su 4 od njih na pravcu x, a 2 na pravcu y. Koliko trokuta ima vrhove u istaknutim točkama?

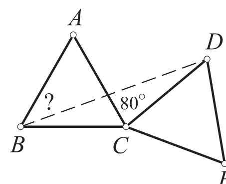
A. 6 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 16 **E.** 18

12. Prema istraživanju 2/3 kupaca kupuje proizvod A, dok 1/3 kupuje proizvod B. Nakon reklamne kampanje za proizvod A novo istraživanje pokazalo je da 1/4 kupaca

koji su kupovali proizvod A sada kupuje proizvod B. Dakle:
A. 5/12 kupaca kupuje proizvod A, a 7/12 proizvod B
B. 1/4 kupaca kupuje proizvod A, a 3/4 proizvod B
C. 7/12 kupaca kupuje proizvod A, a 5/12 proizvod B
D. 1/2 kupaca kupuje proizvod A, a 1/2 proizvod B
E. 1/3 kupaca kupuje proizvod A, a 2/3 proizvod B

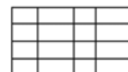
13. Želimo li izračunati broj 8^8, potencirat ćemo broj 4^4 eksponentom
A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 8 **E.** 16

14. Trokuti ABC i CDE na slici sukladni su jednakostranični trokuti. Ako je veličina kuta ACD jednaka $80°$, kolika je veličina kuta ABD?
A. $25°$ **B.** $30°$ **C.** $35°$ **D.** $40°$ **E.** $45°$



15. Promotri niz brojeva 1, 2, 3, 4, 5, ..., 10 000. Koliki je postotak brojeva među njima koji su kvadrati prirodnih brojeva?
A. 1% **B.** 1.5% **C.** 2% **D.** 2.5% **E.** 5%

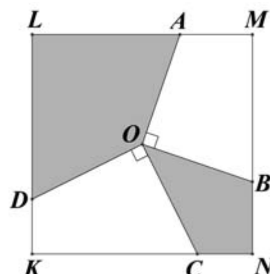
16. Nacrtamo li 9 pravaca (5 horizontalnih i 4 vertikalna) dobit ćemo tablicu s 12 polja. Ako nacrtamo 6 horizontalnih i 3 vertikalna pravca, dobit ćemo samo 10 polja. Koliko se najviše polja može dobiti ako nacrtamo 15 pravaca?
A. 22 **B.** 30 **C.** 36 **D.** 40 **E.** 42



17. Iz prikazane tablice izaberi tri broja tako da svaki od njih bude iz različitog retka i iz različitog stupca, a zatim izračunaj njihov zbroj. Koliki najveći zbroj možeš dobiti?
A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 21 **E.** 24

1	2	3
4	5	6
7	8	9

18. Dužine $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ i $\overline{OD}$ nacrtane su iz središta O kvadrata $KLMN$ do njegovih stranica (vidi sliku) tako da je $OA \perp OB$ i $OC \perp OD$. Ako je duljina stranice kvadrata jednaka 2, ukupna površina osjenčanih likova je:
A. 1 **B.** 2 **C.** 2.5 **D.** 2.25
E. ovisi o izboru točaka B i C



19. Neispravni kalkulator ne pokazuje znamenku 1. Primjerice, upišemo li broj 3131, na zaslonu će pisati samo 33, bez razmaka. Miško je u kalkulator upisao neki šesteroznamenkasti broj, no na zaslonu se pojavio broj 2007. Koliko je različitih brojeva mogao upisati?
A. 12 **B.** 13 **C.** 14 **D.** 15 **E.** 16

20. Ivica je hodao 2 sata bez zaustavljanja. Prvo je išao ravnim dijelom staze, a zatim se uspinjao. Na povratku se prvo spuštao, a zatim je išao ravnim dijelom. Na ravnom terenu kretao se brzinom od 4 km/ h, uspinjao se brzinom od 3 km/ h, a spuštao brzinom od 6 km/ h. Kolika je ukupna duljina prijeđenog puta?
A. Ne možemo znati **B.** 6 km **C.** 7.5 km **D.** 8 km **E.** 10 km

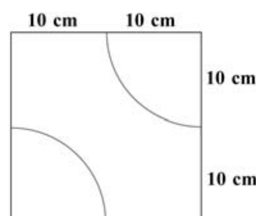
21. Ante i Borna zajedno teže manje nego Cvjetko i Darko a Cvjetko i Edo zajedno teže manje nego Franjo i Borna. Koja je od sljedećih tvrdnji sigurno istinita?
A. Ante i Edo zajedno teže manje od Franje i Darka
B. Darko i Edo zajedno teže manje od Cvjetka i Franje
C. Darko i Franjo zajedno teže manje od Ante i Cvjetka
D. Ante i Borna zajedno teže manje od Cvjetka i Franje
E. Ante, Borna i Cvjetko zajedno teže manje od Darka, Ede and Franje

22. Prva znamenka četveroznamenkastog broja jednaka je broju znamenki 0 u tom broju, druga znamenka broja jednaka je broju znamenki 1, treća je znamenka jednaka broju znamenki 2, a četvrta znamenka jednaka je broju znamenki 3. Koliko takvih brojeva postoji?
A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

23. Prirodni broj n ima 2, a broj $n+1$, 3 djelitelja. Koliko djelitelja ima broj $n+2$?
A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** ovisi o n

24. Uz kružnicu je napisano pet prirodnih brojeva tako da nikoja dva ili tri uzastopno napisana broja ne daju zbroj djeljiv brojem 3. Koliko je od tih pet brojeva djeljivo brojem 3?
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** nije moguće odrediti

25. Na slici je pločica dimenzija $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$. Njima želimo prekriti plohu dimenzija $80\text{ cm} \times 80\text{ cm}$. Pri tome se zakrivljene linije (četvrtine kružnice) međusobno spajaju. Kolika može biti duljina spojene zakrivljene linije u cm?
A. 75π **B.** 100π **C.** 105π
D. 110π **E.** 525π



Zadaci za učenike 2. i 3. razreda srednje škole (Junior)

1. Tri dječaka imaju zajedno 30 kuglica. Ako Branimir dade Darku 5 kuglica, zatim Darko dade Anti 4, a onda Ante dade Branimiru 2 kuglice, svaki od njih ima jednak broj kuglica. Koliko je kuglica imao Ante na početku?
A. 8 **B.** 9 **C.** 11 **D.** 12 **E.** 13

2. Pri izvlačenju listića na tomboli, voditelj je objavio: Dobitni listići su oni koji sadrže najmanje peteroznamenkasti broj kojemu su najmanje tri znamenke veće od 2. Tada je voditelj izvukao listiće s ovim brojevima 1022, 22222, 102334, 213343, 3042531. Koliko od njih su dobitni listići?
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

3. U trokutu ABC, točka D je polovište od $\overline{AB}$, E je polovište od $\overline{DB}$, a F je polovište od $\overline{BC}$. Ako je površina trokuta ABC 96, tada je površina trokuta AEF jednaka
A. 16 **B.** 24 **C.** 32 **D.** 36 **E.** 48

4. Sven ima u torbama A, B i C ukupno 2007 pikula. U svakoj ih je torbi jednak broj. Ako prebaci 2/3 pikula iz torbe A u torbu C, omjer pikula u torbama A i C će biti

jednak

A. 1 : 2 **B.** 1 : 3 **C.** 2 : 3 **D.** 1 : 5 **E.** 3 : 2

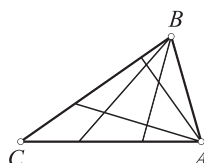
5. Međunarodna organizacija ima 32 člana. Koliko će članova imati nakon tri godine, ako u svakoj godini broj članova naraste za 50% u odnosu na proteklu godinu?

A. 182 **B.** 128 **C.** 108 **D.** 96 **E.** 80

6. Polja tablice 4×4 obojana su crvenom i zelenom bojom tako da su u svakom retku i u svakom stupcu točno dva crvena i točno dva zelena polja. Koje su boje u poljima X i Y?

A. crvena i crvena **B.** crvena i zelena **C.** zelena i crvena

D. zelena i zelena **E.** nemoguće je odrediti



c		c	
		c	
	X		z
	Y		

7. Na slici je prikazan trokut ABC u kojem su iz vrhova A i B povučene po dvije dužine koje dijele trokut ABC na 9 dijelova. Na koliko bi dijelova trokut bio podijeljen da je iz vrhova A i B povučeno po 4 dužine?

A. 16 **B.** 25 **C.** 36 **D.** 42 **E.** 49

8. Ako želimo odrediti broj 8^8, moramo potencirati broj 4^4 s eksponentom

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 8 **E.** 16

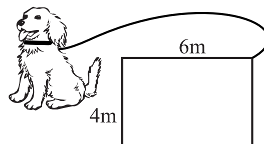
9. U sljedećem računu različita slova određuju različite znamenke. Kolika je najmanja vrijednost izraza 2007 – KAN – GA – ROO?

A. 100 **B.** 110 **C.** 112 **D.** 119 **E.** 129

10. Pas je zavezan na uglu kuće 10-metarskom uzicom. Koliku površinu on može obići? Kuća je dimenzija $6\ \text{m} \times 4\ \text{m}$.

A. $20\pi\ \text{m}^2$ **B.** $22\pi\ \text{m}^2$ **C.** $40\pi\ \text{m}^2$

D. $88\pi\ \text{m}^2$ **E.** $100\pi\ \text{m}^2$



11. Sada je 21 sat i vozim automobil 100 km/ h. Tom brzinom imam dovoljno benzina za samo 80 km, a sljedeća je benzinska stanica udaljena 100 km. Količina benzina koji troši moj automobil po kilometru obrnuto je proporcionalna brzini kojom se krećem. Želim doći na stanicu što je prije moguće. U koliko sati ću stići na benzinsku stanicu?

A. 22 : 12 **B.** 22 : 15 **C.** 22 : 20 **D.** 22 : 25 **E.** 22 : 30

12. Trapez je dobiven odsijecanjem jednog trokutića od jednakostraničnog trokuta. Potom se dvije kopije tog trapeza spoje tako da tvore paralelogram. Opseg paralelograma je za 10 cm dulji od opsega početnog jednakostraničnog trokuta. Koliki je opseg početnog jednakostraničnog trokuta?

A. 10 cm **B.** 30 cm **C.** 40 cm **D.** 60 cm **E.** ne može se odrediti

13. Niz KANGAROOKANGAROO. . . KANGAROO sadrži 20 riječi KANGAROO. Prvo prebrišemo sva slova na neparnim mjestima. Tada, opet prebrišemo sva slova na neparnim mjestima u preostalom nizu itd. Nakon nekoliko takvih brisanja ostane samo jedno slovo i to je slovo

A. *K* **B.** *A* **C.** *N* **D.** *G* **E.** *O*

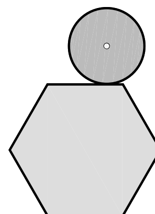
14. Između dvije škole organizirano je stolnotenisko natjecanje u parovima. Tim svake škole sadrži po 5 učenika od kojih se tvore parovi. Svaki par jedne škole igra

protiv svakog para druge škole samo jednom. U koliko mečeva će igrati svaki učenik?
A. 10 **B.** 20 **C.** 30 **D.** 40 **E.** 50

15. Na razredbenom ispitu za upis na fakultet, kandidat mora odgovoriti ispravno na barem 80% pitanja. Nakon što je riješio 15 pitanja, Petar zna da je na 5 od njih odgovorio netočno, ali na preostalih 10 je ispravno odgovorio. Ako na sva preostala pitanja odgovori ispravno Petar će ispravno riješiti točno 80% razredbenog ispita. Koliko pitanja ima test?
A. 20 **B.** 25 **C.** 30 **D.** 35 **E.** 40

16. U selu ne žive dva čovjeka s istim brojem vlasi kose. Nitko nema točno 2007 vlasi. Ivan ima najviše vlasi kose na glavi, a broj njegovih vlasi kose je manji od ukupnog broja seljana. Koliko najviše može biti seljana u tom selu?
A. 0 **B.** 2006 **C.** 2007 **D.** 2008 **E.** 2009

17. Novčić promjera 1 cm kotrlja se oko pravilnog šesterokuta čije su stranice duge 1 cm (slika). Kolika je duljina puta, u cm, kojeg prijeđe središte novčića nakon što se otkotrlja jednom oko cijelog šesterokuta?

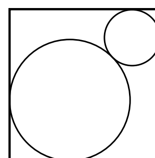


A. $6+\frac{\pi}{2}$ **B.** $6+\pi$ **C.** $12+\pi$ **D.** $6+2\pi$ **E.** $12+2\pi$

18. Neka je A najmanji prirodni broj s ovim svojstvima: $10A$ je potpuni kvadrat i $6A$ je potpuni kub. Koliko pozitivnih djelitelja ima broj A?
A. 30 **B.** 40 **C.** 54 **D.** 72 **E.** 96

19. Učenici su rješavali jedan zanimljivi zadatak na Klokanu. Broj dječaka koji su ispravno riješili zadatak jednak je broju djevojčica koje nisu ispravno riješile zadatak. Koga ima više: onih koji su ispravno riješili zadatak ili djevojčica?
A. djevojčica **B.** onih koji su ispravno riješili zadatak **C.** jednako ih ima **D.** nemoguće je odrediti **E.** opisana situacija nije moguća

20. Dva kruga imaju središta na dijagonali kvadrata. Uz to, međusobno se diraju, a diraju i po dvije stranice kvadrata (slika). Duljina stranice kvadrata je 1 cm. Koliki je zbroj polumjera krugova?



A. $\frac{1}{2}$ cm **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm **C.** $\sqrt{2}-1$ cm **D.** $2-\sqrt{2}$ cm **E.** nijedan od ponuđenih

21. Zadan je kvadrat $ABCD$ stranice 1. Potom su nacrtani svi kvadrati koji sa zadanim imaju zajednička bar 2 vrha. Kolika je površina područja koje je pokriveno s bar jednim od tih kvadrata?
A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8 **E.** 9

22. Koji od sljedećih brojeva ne može biti zapisan u obliku $x+\sqrt{x}$, gdje je x prirodni broj?
A. 870 **B.** 110 **C.** 90 **D.** 60 **E.** 30

23. Realna rješenja jednadžbe $x^2-3x+1=0$ su a i b. Koliko je a^3+b^3?
A. 12 **B.** 14 **C.** 16 **D.** 18 **E.** 24

24. Udaljenost dvaju bridova pravilnoga tetraedra koji se ne presijecaju je 6 cm. Koliki je njegov volumen izražen u cm^3?

A. 18 **B.** 36 **C.** 48 **D.** 72 **E.** 144

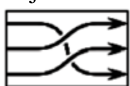
Zadaci za za učenike 4. razreda srednje škole (Student)

1. Marko je izgradio stazu za dječje auto-utrke.





Lijeva slika prikazuje poredak vozila na početku utrke tom stazom. Koji element staze Marko treba ubaciti umjesto elementa X da bi poredak vozila na kraju utrke bio kao na desnoj slici?

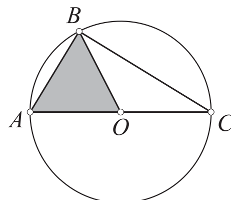
A.  **B.**  **C.**  **D.**  **E.** 

2. Tri dječaka imaju zajedno 30 kuglica. Ako Branimir dade Darku 5 kuglica, zatim Darko dade Anti 4, a onda Ante dade Branimiru 2 kuglice, svaki od njih ima jednak broj kuglica. Koliko je kuglica imao Ante na početku?

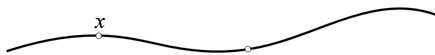
A. 8 **B.** 9 **C.** 11 **D.** 12 **E.** 13

3. Površina osjenčanog trokuta je $\sqrt{3}$. Kolika je površina trokuta ABC?

A. $2\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** 5 **D.** 4 **E.** $4\sqrt{3}$



4. Stari Egipćani su za određivanje pravog kuta koristili uže duljine 12 metara s dva čvora. Ako je jedan čvor, označen s X, udaljen 3 metra od kraja užeta, na kojoj udaljenosti od drugog kraja užeta mora biti drugi čvor tako da se može formirati pravi kut s vrhom u X?



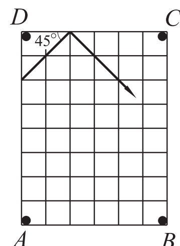
A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** neki drugi odgovor

5. Koliko je $\dfrac{\sin 1^\circ}{\cos 89^\circ}$?

A. 0 **B.** $\operatorname{tg} 1^\circ$ **C.** $\operatorname{ctg} 1^\circ$ **D.** $\dfrac{1}{89}$ **E.** 1

6. Biljarska kugla udara u rub biljarskog stola pod kutom od 45° kao na slici. U koju rupu će kugla ući?

A. A **B.** B **C.** C **D.** D **E.** ni u ijednu

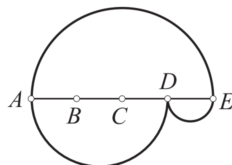


7. Na razredbenom ispitu za upis na fakultet, kandidat mora odgovoriti ispravno na barem 80% pitanja. Nakon što je riješio 15 pitanja, Petar zna da je na 5 od njih odgovorio netočno, ali na preostalih 10 je ispravno odgovorio. Ako na sva preostala pitanja odgovori ispravno Petar će ispravno riješiti točno 80% razredbenog ispita. Koliko pitanja ima test?

A. 20 **B.** 25 **C.** 30 **D.** 35 **E.** 40

8. Dužina $\overline{AE}$ podijeljena je točkama B, C i D na četiri jednaka dijela. Nad dužinama $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ i $\overline{DE}$ kao promjerima nacrtane su polukružnice kao na slici. Izračunaj omjer duljine gornje polukružnice i zbroja duljina donjih polukružnica.

A. 1 : 2 **B.** 2 : 3 **C.** 2 : 1 **D.** 3 : 2 **E.** 1 : 1



9. Zadan je kvadrat $ABCD$ stranice 1. Potom su nacrtani svi kvadrati koji sa zadanim kvadratom imaju zajednička bar 2 vrha. Kolika je površina područja koje je pokriveno s bar jednim od tih kvadrata?

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8 **E.** 9

10. Koliko iznosi cjelobrojno rješenje x jednadžbe $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$?

A. 0 **B.** 3 **C.** -1 **D.** 1 **E.** 2

11. Kut β je za 25% manji od kuta γ i za 50% veći od kuta α. Tada je γ

A. za 25% veći od α **B.** za 50% veći α **C.** za 75% veći od α

D. za 100% veći od α **E.** za 125% veći od α

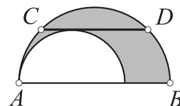
12. Kolika je vrijednost zbroja $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + ... + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ$?

A. 1 **B.** π **C.** 0 **D.** 10 **E.** -1

13. Dva polukruga dana su kao na slici. Tetiva $\overline{CD}$, duljine 4, paralelna je s promjerom $\overline{AB}$ većeg polukruga i dira manji polukrug. Kolika je površina isjenčanog lika?

A. π **B.** 1.5π **C.** 2π

D. 3π **E.** nijedan od danih odgovora



14. Zbroj pet uzastopna cijela broja jednak je zbroju sljedeća tri uzastopna cijela broja. Najveći od tih osam brojeva jednak je:

A. 4 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 11 **E.** neki drugi broj

15. Tom je rođen točno na majčin 20. rođendan. Ako oboje požive dovoljno dugo, koliko puta će Tomov broj godina biti djelitelj majčinog broja godina?

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7 **E.** 8

16. Otok je naseljen istinoljupcima i lažljivcima. Svaki istinoljubac uvijek govori istinu, a svaki lažljivac uvijek govori laž. Kad su otočanina A pitali kojoj skupini pripadaju on i njegov susjed B odgovorio je da je bar jedan od njih dvojice lažljivac. Koja od sljedećih rečenica je istinita?

A. A nije mogao izreći tu tvrdnju **B.** obojica su lažljivci

C. obojica su istinoljupci **D.** A je lažljivac i B je istinoljubac

E. B je lažljivac, dok je A istinoljubac

17. Promotrite sferu polumjera 3 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Koliko točaka sfere ima sve tri koordinate cjelobrojne?

A. 30 **B.** 24 **C.** 12 **D.** 6 **E.** 3

18. Koji od sljedećih brojeva ne može biti zapisan u obliku $x + \sqrt{x}$, gdje je x prirodni broj?

A. 870 **B.** 110 **C.** 90 **D.** 60 **E.** 30

19. Ako je $f(x) = \dfrac{2x}{3x+4}$ i $f(g(x)) = x$, tada je $g(x) =$

A. $g(x) = \dfrac{3x+4}{2x}$ **B.** $g(x) = \dfrac{3x}{2x+4}$ **C.** $g(x) = \dfrac{2x+4}{4x}$

D. $g(x) = \dfrac{4x}{2-3x}$ **E.** neki drugi odgovor

20. Ana, Borna i Dražen bacaju igraću kocku. Ana pobjeđuje ako joj se pri bacanju pojave brojevi 1, 2 ili 3; Borna pobjeđuje ako mu se pojave 4 ili 5, a Dražen pobjeđuje ako mu se pojavi 6. Kocku redom bacaju Ana, Borna, Dražen, pa opet Ana i tako redom dok netko od njih ne pobijedi. Kolika je vjerojatnost da će pobijediti Dražen?

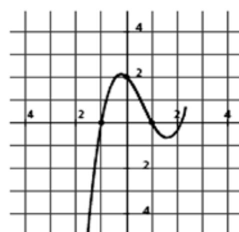
A. $\dfrac{1}{6}$ **B.** $\dfrac{1}{8}$ **C.** $\dfrac{1}{11}$ **D.** $\dfrac{1}{13}$ **E.** Nemoguće je da Dražen pobijedi.

21. Koliko stupnjeva ima šiljasti kut romba kojemu je stranica geometrijska sredina dijagonala?

A. 15° **B.** 30° **C.** 45° **D.** 60° **E.** 75°

22. Na slici desno prikazan je graf funkcije $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Koja je vrijednost koeficijenta b?

A. -4 **B.** -2 **C.** 0 **D.** 2 **E.** 4



23. Odredite broj svih realnih brojeva a za koje kvadratna jednadžba $x^2+ax+2007 = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja.

A. 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8 **E.** drugi odgovor

24. Znamenkama broja 123451234512345... popunjavamo spiralu kao na slici. Koja se znamenka nalazi u kvadratiću koji se nalazi u stotom redu iznad osjenčanog središnjeg kvadratića?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

	1	2	3	.	.	.
	5	2	3	4	5	.
	4	1	1	2	1	
	3	5	4	3	2	
	2	1	5	4	3	

⋆ ⋆ ⋆

Obavijesti o ovom natjecanju mogu se dobiti na internetskoj stranici `http://www.math.hr/hmd.`

Gigantski magnetootpor – Nobelova nagrada za fiziku 2007. g.

Amir Hamzić[1], *Zagreb*

Stalno smanjivanje fizičkih dimenzija elektroničkih uređaja i računala postala je naša svakodnevnica na koju smo se vrlo brzo navikli; pri tome vrlo lako zanemarujemo činjenicu da je napredak u minijaturizaciji posljedica uske povezanosti temeljnih fizikalnih istraživanja i naprednih tehnoloških postupaka. Kapaciteti današnjih tvrdih diskova dosežu već i do tisuću gigabajta, a *iPod* i drugi *MP3* uređaji sadrže sve veći broj audio i video zapisa. Ovakav spektakularan tehnološki razvoj omogućio je nove metode čitanja magnetskih podataka zasnovane na fizikalnom efektu nazvanom "gigantski magnetootpor", koji su, 1988. godine, gotovo istovremeno, ali i neovisno jedan o drugom, otkrili profesor Albert Fert (Université Paris-Sud, Francuska) i profesor Peter Grünberg (Forschungszentrum Jülich, Njemačka). Za to otkriće dodijeljena im je i ovogodišnja Nobelova nagrada za fiziku. Izbor laureata i njihovog otkrića je, nakon duljeg vremena, u najvećoj mogućoj mjeri u skladu s uputama koje je Alfred Nobel naveo u svojoj oporuci: nagrada se treba dodijeliti osobi (ili osobama) čije značajno fizikalno otkriće će imati najveći utjecaj na čovječanstvo.

Što je to magnetootpor i kada je on gigantski?

Materijali se u prirodi mogu podijeliti na različite načine, zavisno o fizikalnom svojstvu koje se uzima kao kriterij. Neki materijali su nemagnetični (npr. bakar), a drugi (npr. željezo) se ponašaju kao magneti: oni su tzv. feromagneti i kaže se da imaju dobro definirani magnetski moment ili magnetizaciju. Po načinu pak kako vode električnu struju, materijale dijelimo na vodiče, poluvodiče i izolatore. Električnu struju čine elektroni, koji se, pri prolazu kroz dani materijal, u većoj ili manjoj mjeri sudaraju i raspršuju s atomima koji titraju s primjesama u tom materijalu. Raspršenja se manifestiraju kao električni otpor, i što ih je više, otpor je veći – zbog toga se npr. zagrijava loš vodič kad kroz njega teče struja. Ako vodič, kroz koji teče struja, stavimo još i u magnetsko polje, njegov otpor se dodatno promijeni i to je tzv. magnetootpor.

Elektroni također imaju svoj vlastiti magnetski moment (to njihovo kvantnomehaničko svojstvo naziva se spin, i može se, vrlo slobodno, zamisliti kao minijaturna magnetska igla). Spin elektrona može imati samo dvije moguće orijentacije. Kad takvi elektroni prolaze kroz feromagnet, međudjelovanje njihovog spina s magnetizacijom feromagnetskog materijala dodatno doprinosi električnom otporu, a prve teorijske modele o utjecaju spina na električni otpor feromagneta predložio je tridesetih godina prošlog stoljeća Sir Neville Mott. No još 1857. godine engleski fizičar W. Thomson (Lord Kelvin) utvrdio je eksperimentalno da je magnetootpor klasičnih feromagnetskih materijala (npr. željezo, nikal, kobalt) anizotropan, tj. da se njegov iznos razlikuje ako struja kroz feromagnet teče u smjeru ili okomito na primijenjeno magnetsko polje (koje usmjeruje magnetizaciju feromagneta). Razlika (anizotropija) vrijednosti magnetootpora je vrlo mala i iznosi svega nekoliko postotaka. Upravo ova (iako mala) fizikalna pojava

---

[1] Autor je redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, doktorant i još danas suradnik prof. dr. Alberta Ferta.

koristila se, dugi niz godina, u magnetskim senzorima i glavama za čitanje magnetskih zapisa.

Pojednostavnjeno rečeno, tri su bitna postignuća koja su prethodila otkriću gigantskog magnetootpora. Godine 1970. Albert Fert je završio doktorsku disertaciju, u kojoj je izložio rezultate svojih eksperimentalnih istraživanja električnog otpora i magnetootpora različitih feromagnetskih materijala. Na temelju tih rezultata postavio je i model "dviju struja" ovisnih o spinu, i pokazao kako raspršenje elektrona (odnosno električni otpor) ovisi o relativnoj orijentaciji spina vodljivog elektrona i smjera magnetizacije feromagneta: ako su spin elektrona i magnetizacija feromagneta međusobno paralelni, raspršenje nije značajno i električni otpor je malog iznosa; ako je pak relativna orijentacija antiparalelna, raspršenje, odnosno otpor, je veliko. Desetak godina kasnije Peter Grünberg je proučavao magnetsko međudjelovanje između dva feromagneta koji su međusobno odvojeni tankim nemagnetskim slojem, i pokazao da ta međudjelovanja (pod određenim uvjetima) mogu biti antiferomagnetska, tj. da su smjerovi magnetizacija feromagnetskih slojeva antiparalelni kada nema vanjskog magnetskog polja. Primjenom magnetskog polja smjerovi magnetizacija mogu se promijeniti u paralelnu orijentaciju. Treći, bitni, element bio je razvoj "molecular beam epitaxy" tehnike, koja je omogućila dobivanje višeslojnih magnetskih struktura, sastavljenih od alternirajućih feromagnetskih (npr. Fe, Co, Ni) i nemagnetskih (npr. Cr, Cu) slojeva. Pojedini sloj činilo je nekoliko slojeva dobro uređenih atoma, a ukupna debljina nije prelazila nekoliko nanometara.

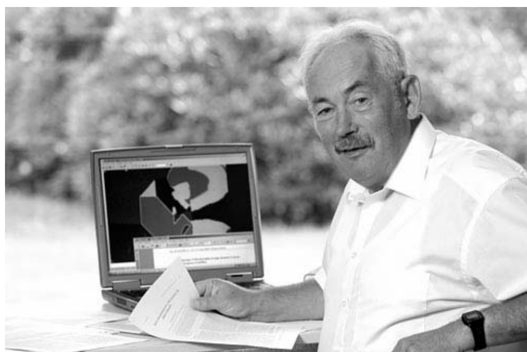


Slika 1. Prof. dr. Albert Fert (desno) nakon objave o dodjeli nagrade prima čestitku prof. dr. Amira Hamzića.

Višeslojne strukture koje je istraživao Albert Fert sastojale su se od tridesetak slojeva željeza i kroma. Primjenom vanjskog magnetskog polja ostvarena je promjena relativne orijentacije magnetizacije susjednih feromagnetskih slojeva (iz antiparalelne u paralelnu), pri čemu su promjene magnetootpora na 4.2 K bile i do 50%. Budući da je to bilo znatno veće od (do tada poznatog) klasičnog anizotropnog magnetootpora feromagneta, nova fizikalna pojava je dobila naziv gigantski magnetootpor (*giant magnetoresistance* – GMR). Peter Grünberg je (nezavisno) istraživao jednostavnu troslojnu Fe/Cr/Fe strukturu i izmjerio magnetootpor od oko 1.5%, ali na sobnoj temperaturi. Kasnije se pokazalo da je, umjesto Fe/Cr sustava, kombinacija kobalta i bakra (Co/Cu) puno efikasnija i jednostavnja za pripremu, te se ona danas smatra kao "klasični" sustav koji pokazuje GMR.

Odmah po otkriću 1988. godine, Peter Grünberg je anticipirao široke mogućnosti primjena GMR-a te prijavio patent prvo u Njemačkoj, zatim u Evropi te u SAD-u (do

2001. godine njegova je zarada na patentnim pravima bila preko 10 milijuna dolara). Već 1993. godine započinju prve primjene GMR u magnetskim senzorima, a prve komercijalno proizvedene glave koje koriste GMR za čitanje tvrdih diskova dolaze na tržište 1997. godine.



Slika 2. Prof. dr. Peter Grünberg.

Primjena GMR-a u glavama za čitanje tvrdih diskova je zapravo vrlo jednostavna. Nanometarski senzorski element sastoji se u osnovi od dva feromagnetska sloja koji su međusobno odvojeni tankim nemagnetskim slojem (najčešće bakar) koji osigurava slabo magnetsko vezanje između ta dva feromagneta. Smjer magnetizacije jednog feromagnetskog sloja je fiksiran dodatnim slojem jakog antiferomagneta. Drugim, "slobodnim", feromagnetskim slojem detektira se prisustvo magnetskog polja (bita) na površini diska: kad bit prođe ispod tog sloja, magnetsko polje izaziva promjenu orijentacije "slobodne" magnetizacije u odnosu na onu koja je fiksirana, a to se, zbog GMR efekta, manifestira kao značajna promjena električnog otpora cjelokupnog senzora. Osnovna razlika u odnosu na prethodne senzore s običnim magnetootporom leži u činjenici da GMR senzori imaju značajno veću osjetljivost – potrebno magnetsko polje koje predstavlja bit može biti puno slabije, što znači da površina koju zauzima bit na površini diska može biti puno manja. To pak znači da je na istu površinu tvrdog diska moguće pohraniti veći broj bitova i tako povećati memorijski kapacitet diska.



Slika 3. Posljedica otkrića velikog magnetootpora je danas minimalizacija hard diskova.

Tipična površina koju danas zauzima jedan bit je reda veličine 0.1 $\mu\mathrm{m}^2$, a gustoće memorija prelaze 20 Gb/cm^2, što predstavlja povećanje veće od 100 puta u odnosu na diskove prije GMR-a; diskovi kapaciteta preko 200 Gb postaju svakodnevnica za

prijenosna računala. Danas, dvadesetak godina nakon otkrića, godišnje se proizvodi i komercijalizira preko 600 milijuna glava za čitanje zasnovanih na GMR efektu i tvrdi diskovi u svim računalima opremljeni su s takvim uređajima. Procjenjuje se da je danas ukupna vrijednost tržišta glava za čitanje tvrdih diskova preko pet milijardi eura. Povećanje kapaciteta magnetskih zapisa našlo je velike primjene i u drugim vidovima potrošačke i telekomunikacijske elektronike.

GMR je predstavljao i početak novog područja istraživanja u fizici kondenzirane materije nazvanog spintronika, u kojoj se koristi spin za prijenos i pohranu informacija. Dok se u današnjoj "klasičnoj" elektronici koriste dvije vrste nosilaca naboja (elektroni i šupljine), a njihovo gibanje je posljedica djelovanja na njihov naboj, u spintronici se djelovanje vrši na spin elektrona. Područje spintronike se razvija u nekoliko smjerova: tuneliranje elektrona u spojevima s oksidnim barijerama, promjene magnetskog uređenja izazvane injekcijom spinova te istraživanja novih materijala (razrijeđeni oksidni feromagneti, magnetski poluvodiči). Prva dva smjera istraživanja imaju velike mogućnosti primjena kao magnetske memorije (MRAM), koje su se već počele primjenjivati. Za razliku od postojećih poluvodičkih memorija (DRAM, SRAM), MRAM ne ovisi o napajanju i u njima informacije ostaju pohranjene i nakon isključivanja uređaja, imaju veći kapacitet integracije, kraće vrijeme pristupa i veću pouzdanost. U MRAM-u se koriste metali (a ne poluvodiči), pa imaju značajnu prednost jer su neovisne o kozmičkom zračenju i mogu se koristiti u širem temperaturnom opsegu (primjene za vojnu, avionsku i svemirsku tehnologiju).

Eksperimentalna istraživanja u spintronici su skupa, i to se prvenstveno odnosi na proces dobivanje višeslojnih struktura nanometarskih dimenzija i njihovu litografsku obradu (aparature i tzv. "čiste sobe", u kojima se strogo kontrolira vlažnost i pritisak te koncentracija čestica u zraku). Takvi laboratoriji su i u svijetu najčešće u okviru velikih industrijskih grupacija, koje imaju i komercijalne interese za spintroniku (npr. IBM, Hitachi, Thales,...), pa su spremni podržati, financirati i uključiti se u temeljna (fundamentalna) istraživanja. U našoj zemlji takvi uvjeti ne postoje, ali to ne znači da i naši fizičari ne mogu sudjelovati u istraživanjima u spintronici. I sam ovogodišnji nobelovac, prof. Fert, formirao je još 1995. godine istraživačku grupu u suradnji s francuskim koncernom *Thales* (*Unite Mixte de Recherche CNRS/Thales*), u kojoj od samog početka, kao vanjski suradnici, sudjeluju aktivno i ravnopravno i istraživači iz Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagreba. Nakon rada na promjenama magnetskog uređenja izazvanih injekcijom spinova u Cu/Cu/Co strukturama, u posljednjih nekoliko godina radi se više na proučavanjima svojstva Co-La/$SrTiO_3$ sustava, koji bi mogao biti vrlo pogodan materijal za polarizaciju spinova. Tematika istraživanja uključuje i komplementarno korištenje eksperimentalnih postava u Zagrebu (vrlo niske temperature i vrlo jaka magnetska polja) koji postoje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Suradnja je do sada rezultirala s preko dvadesetak zajedničkih radova objavljenih u znanstvenim časopisima te izloženih na međunarodnim skupovima.

U proteklih sedamdesetak godina prve teorijske ideje o ulozi spina u električnoj vodljivosti feromagneta dobile su svoje potpune fizikalne potvrde i razrade, a krajem 20. stoljeća su postale i nezaobilazni dio informatičke tehnologije. Bio je to proces u kojem su se fizikalni principi i pristupi kombinirali s naprednim tehnološkim rješenjima. Tako je, još jednom, potvrđena činjenica da fundamentalna istraživanja uvijek prethode novim tehnologijama, ali i da konačna uspješna realizacija zahtijeva usku suradnju znanosti i tehnologije.

Rješenje nagradnog natječaja br. 179

Rješenje. Pretpostavimo da je neki od brojeva x, y, z manji od 3. Tada je zbroj preostala dva broja veći od 8, pa je barem jedan od njih veći od 4. U tom slučaju je

$$[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geqslant 4^4 = 256 > 243.$$

Zato je svaki od njih veći ili jednak 3. Tada je

$$[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geqslant 3^4 + 3^4 + 3^4 = 243.$$

Knjigom su nagrađeni sljedeći rješavatelji:

1. *Ivo Božić* (2), XV. gimnazija, Zagreb; 2. *Haris Čaušević* (3), Treća gimnazija, Sarajevo; 3. *Ervin Duraković* (4), Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka; 4. *Vedran Rafaelić* (4), Opća gimnazija, SŠ Vladimira Gortana, Buje; 5. *Šimun Romić* (4), Gimnazija Metković, Metković.

Riješili zadatke iz br. 4/228

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Edin Ajanović* (3), I. bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH, 3049–3052, 3055–3057, 3060; *Ivo Božić* (2), XV. gimnazija, Zagreb, 3049–3052, 3061; *Haris Čaušević* (3), Treća gimnazija, Sarajevo, BiH, 3054, 3059, 3060, 3062; *Marina Furkes* (4), Gimnazija Frana Galovića, Koprivnica 3052; *Vlatka Kos-Grabar* (3), Srednja škola Zlatar, Zlatar, 3049, 3051; *Marko Picutić* (1), Srednja škola Zlatar, Zlatar, 3049–3052; *Vedran Rafaelić* (4), Opća gimnazija, SŠ Vladimira Gortana, Buje, sve; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 3049–3051, 3055.

b) Iz fizike: *Anton Matija Ovčar* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 264; *Iva Popović* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 265; *Marko Čolić* (4), III. gimnazija, Osijek, 1364–1369; *Marina Furkes* (4), Gimnazija Frana Galovića, Koprivnica, 1365; *Gabrijel Guberović* (3), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 1364, 1365, 1367, 1369; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 1365.

MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL)
za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine.

Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i
HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2007./2008. je 60 kn, pojedini broj stoji 15 kn.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)

Adresa lista je:
"Matematičko–fizički list, Bijenička 32, 10001 Zagreb, tel. (01) 4833-891, fax 4683-535.
Uplate na žiro račun:
Hrvatsko fizikalno društvo, Zagreb,
br. 2360000-1101301202 (kn),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)-kopiju uplatnice ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http://www.math.hr/mfl, e-mail: mfl@hfd.hr

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom:
Element, Zagreb, Menčetićeva 2

Tisak:
Tiskara Zelina d.d., Sv. Ivan Zelina, Ul. K. Krizmanić 1
Naklada ovog broja 3000 primjeraka

Slika na naslovnici prikazuje prigodnu poštansku marku s detaljem iz *Arithmetike Horvatszke.* (Vidi str. 199.)

SADRŽAJ

Dragi čitatelji!

Ove godine Hrvatska pošta je obilježila 250. obljetnicu tiskanja "Arithmetike Horvatszke" M. Šiloboda Bolšića, prvog udžbenika iz računa na hrvatskom kajkavskom narječju, izdavanjem prigodne poštanske marke, čija je slika na prvoj strani omota ovog broja MFL-a.

Nebrojeno puta smo se divili dúgi poslije kiše, a posebno se lijepi prizori pojavljuju u planinama. Suzana Szilner, sa Zavoda za eksperimentalnu fiziku Instituta "Ruđer Bošković" u Zagrebu opisuje ovu pojavu, osvrćući se na njezinu povijest i na danas aktualnu *nuklearnu dúgu* iz atomske i nuklearne fizike.

Donosimo drugi nastavak Uvoda u knjizi *William Feller, Uvod u teoriju vjerojatnosti i primjene, I.*, koji je s engleskog jezika prevela Maja Sekulić, studentica Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Uz Euklidovu geometriju s kojom se upoznaju učenici u osnovnoj i srednjoj školi postoje i neke druge, a ovdje nas s osnovama geometrije Minkowskog upoznaju Romana Capor, asistentica sa Sveučilišta u Dubrovniku, i profesorica Željka Milin Šipuš s Matematičkog odjela PMF-a u Zagrebu. Profesor Šefket Arslanagić s Prirodnomatematičkog fakulteta u Sarajevu ima zanimljiv prilog o nejednakosti Popoviciua i njenim primjenama.

Profesor Dubravko Horvat i asistent Saša Ilijić s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu opisuju "crne rupe" te istraživanju i drugih neobičnih objekata u astronomiji, gdje se koristi klasična opća teorija relativnosti.

Prošle godine je osnovano jedno novo lokalno međunarodno natjecanje, Srednjoeuropska matematička olimpijada, za učenike srednjih škola. Prvo takvo je održano u Austriji, a Hrvatska će svakih nekoliko godina biti domaćinom susreta mladih učenika desetak država, većinom budućih studenata matematike.

Uz ove priloge ima i zadataka za zabavnu matematiku, tu je i najava Otvorenih dana instituta "Ruđer Bošković" u mjesecu travnju, upoznavanje s novim knjigama iz matematike za učenike i nastavnike, zatim zadaci s prijemnog ispita na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu 2007. g. i novi zadatak za Nagradni natječaj.

Uredništvo lista



Loveći dúgu

Suzana Szilner[1], *Zagreb*

8 *Potom reče Bog Noi i sinovima njegovim, što su bili s njim:*
"Evo, sklapam sad zavjet s vama i s vašim potomcima, što će biti nakon vas,
i sa svima živim bićima, što su s vama, s pticama, sa stokom i sa svima zvijerima,
...
13 *Dúgu svoju stavljam u oblake, koja će biti znak zavjeta između mene i zemlje!"*
Biblija, Postanak, glava 9

U svojoj poznatoj priči D. Šimunović iskoristio je mit koji obećava ispunjenje želje prolaskom ispod dúginog luka. Dúga kao most do skrivenog blaga, put do posude zlata i glasnik radosnih događaja, često je korišten motiv u svijetu bajki. Onkraj svih mitova i legendi, dúga je i dalje najistaknutija i najdojmljivija atmosferska pojava.

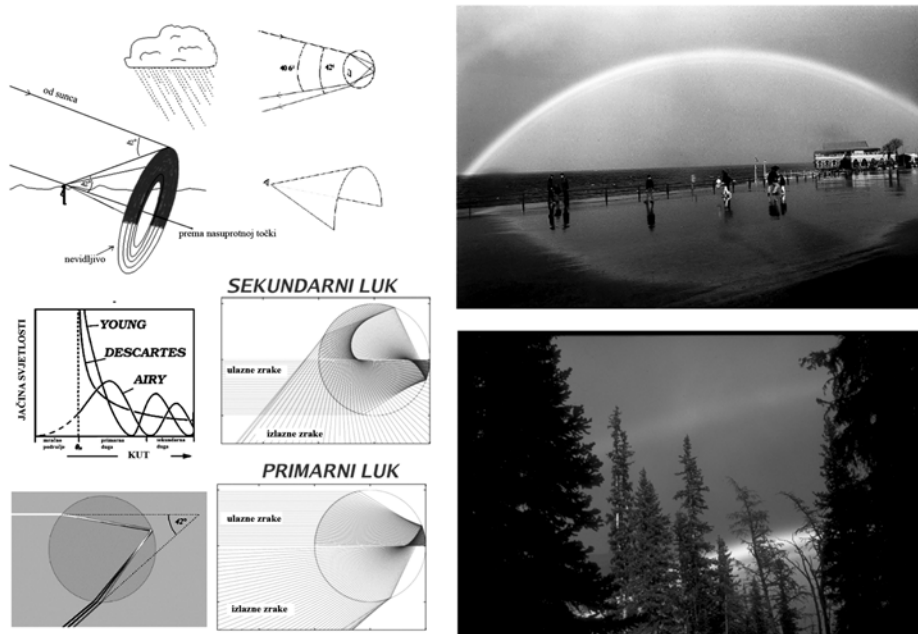
Dúga se pojavljuje na nebeskom svodu u dane kad se izmjenjuju kišna i sunčana razdoblja, a opažač je smješten između sunčevog diska i kišnih oblaka (leđima prema suncu). Ključ misterije skriven je u valnim svojstvima svjetlosti, te u optičkim svojstvima vode i obliku kišnih kapi. Dva su osnovna fenomena koja sudjeluju u stvaranju duginog luka, odbijanje (refleksija) i lom (refrakcija) zraka svjetlosti. Pod imenom atmosferska dúga skrivaju se primarni i sekundarni luk, Alexanderovo tamno područje između dva luka, te nekoliko lukova spektralno bliskih ljubičastoj boji smještenih ispod primarnog luka koje se nazivaju Airyeve oscilacije.

O dúgi je prvi raspravljao Aristotel, određujući je kao neobično odbijanje sunčeve svjetlosti na oblacima. Godine 1266., R. Bacon prvi je izmjerio kut između kapljica kiše na kojima se dúga stvara i upadne sunčeve svjetlosti. Njemački svećenik Theodoric iz Freiburga uvodi postavku da dúga nastaje na svakoj pojedinačnoj kišnoj kapljici. Opitom prati prolazak svjetlosne zrake kroz prozirnu kuglastu posudu ispunjenu vodom i nastanak dúgi slične pojave, tj. pojavu spektra. Splitski nadbiskup Marko Antonije de Dominis, u svojem radu iz 1611. g., znanstveno raspravlja o rastavljanju sunčeve svjetlosti na pripadajuće boje i dúgu određuje kao posljedicu odbijanja i loma svjetlosti na kišnim kapljicama. Nezavisno do istih zaključaka dolazi i Descartes (rad iz 1637. g.) koji dodatno uvodi i matematički aparat za objašnjenje ove atmosferske pojave. Koristeći Snellov zakon (iz 1621. g.) prati zraku svjetlosti pri prolasku kroz jednoliku kuglastu kapljicu vode. Kut loma zrake određen je svojstvima dvaju sredstava, vode i zraka, tj. njihovim indeksima loma koji se definiraju kao omjeri brzine svjetlosti u vakumu (c) i u danom sredstvu (v_i), $n = \dfrac{c}{v_i}$. Indeks loma zraka je nešto malo veći od 1, a vode je 1.33. Omjer sinusa kuta upadne (θ_1) i slomljene (θ_2) zrake za neka dva sredstva konstantan je i jednak omjeru njihovih indeksa loma (n_i):

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (1)$$

[1] Autorica radi u Zavodu za eksperimentalnu fiziku na Institutu "Ruđer Bošković" u Zagrebu.

Na taj način različite boje (valne duljine, λ) lome se u različite izlazne kutove, $n(\lambda_{crveno}) < n(\lambda_{plavo})$, dajući rasap svjetlosti (disperziju), koju je matematički opisao Newton (1666. g.) nakon svog eksperimenta s prizmom.



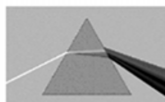
Slika 1. Fotografije i shematski prikazi atmosferske dúge.
U lijevom gornjem kutu nalazi se shematski prikaz nastanka dúge na kišnim kapljicama preko odbijanja i loma zraka svjetlosti koje proizvode primarni luk, položaja promatrača u odnosu na sunce i oblake, te zamišljenog konusa na kojem leži primarni luk dúge. Svaka je dúga koju vidite na nebu jedinstvena jer leži na jedinstvenom konusu s vrhom u oku svakog promatrača, dakle svaka dúga koju vidite na nebu pripada samo vama.
Lijevi donji dio slike pokazuje točan položaj minimuma i maksimuma intenziteta svjetlosti kao funkcije kuta raspršenja slijedeći račune Descartesa, Younga i (kvantitativno točne) Airya. Prikazani su i točni proračuni putanja monokromatskih zraka svjetlosti u kuglastoj kapljici vode koje proizvode primarni i sekundarni luk, te kako se zrake različitih valnih duljina (boja) po pravilima Snellovog zakona odbijaju i lome u različite izlazne kutove.
Na fotografijama na desnoj strani jasno se vide sve pojave atmosferske dúge, primarni luk, te povrh njega sekundarni luk obrnutog slijeda boja. Između lukova nalazi se Alexanderovo tamno područje, a ispod primarnog luka Airyeve oscilacije.

Koristeći saznanja i matematičke metode klasične geometrijske optike (valovi se mogu prikazati putem zraka svjetlosti) moguće je objasniti osnovne pojave i geometriju primarnog i sekundarnog luka. Geometrija je određena kutovima raspršenja koji postavljaju primarni luk oko kuta 42° (točan kut raspršenja razlikuje se od boje do boje) i sekundarni oko 50° (samo nešto manje od 10% upadne svjetlosti dvostruko se odbija unutar kapljice doprinoseći sekundarnom luku obrnutih boja). Između ta dva kuta pristiže neznatno malo upadne svjetlosti stvarajući Alexanderovu vrpcu, dio nebeskog

svoda između dva luka koji je znatno tamniji od okolnog neba. Do ove geometrije dolazi se prateći zraku svjetlosti, preko njenog loma pri ulasku u kuglastu kapljicu vode, odbijanja od stražnje strane kapljice, do ponovnog loma pri izlasku iz kapljice. Svi smjerovi raspršenja jednako su vjerojatni, a ovise o parametru upada zrake na površinu kugle, tj. pomaku upadne zrake u odnosu na os koja prolazi središtem kugle. Upadni parametar raste od nule za prolazak kroz središte kugle, do neke maksimalne vrijednosti kada zraka upada na kapljicu tangencijalno, samo je okrznuvši. Kako raste parametar upada, kut raspršenja također se povećava, ali umjesto da se takvo ponašanje nastavi sve do zrake okrznuća, kut raspršenja doseže maksimalnu vrijednost za upadni parametar oko 7/8 radijusa kapljice. Taj kritični parametar određuje i kritični kut raspršenja, tj. 42° za crvenu svjetlost, kut pod kojim se dúga pojavljuje na nebeskom svodu. Upravo ova činjenica, da postoji neki kritični parametar upada, omogućava povećanje intenziteta svjetlosti u području lukova, veliki broj upadnih sunčevih zraka raspršuje se u relativno usko kutno područje, koje je daleko intenzivnije od okolnog neba.

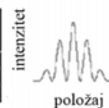


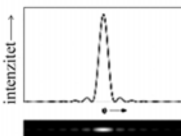


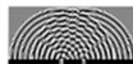
















Slika 2. Osnovni zakoni optike.
Slika shematski prikazuje ponašanje svjetlosti u optici. S lijeve strane vidimo rastav vidljive svjetlosti po valnim duljinama, te osnovne zakone geometrijske optike: odbijanje, lom i raspršenje zraka svjetlosti. Desna strana pokazuje kako se svjetlost ponaša prilikom nailaska na pukotine koje su po svojim dimezijama usporedive s valnom duljinom svjetlosti, ogib valova i njihovo slaganje pri prolazku kroz različiti broj pukotina.

Teorija geometrijske optike ne može objasniti (vrlo rijetko) pojavljivanje dodatnih lukova pod primarnim lukom. Za njihovo objašnjenje potrebno je uključiti valnu narav svjetlosti i teoriju slaganja valova (Youngova teorija interferencije, 1803. g.). Za svaku raspršenu zraku u kut manji od 42° postoje dvije zrake koje se raspršuju u isti kut ovisno o svom parametru upada (malo manji i malo veći od kritičnog). Te dvije zrake,

raspršene u isti kut imaju različite točke upada na kapljicu i različite putanje unutar nje. U ovom slučaju, ta razlika njihovih puteva je mala i bliska samoj njihovoj valnoj duljini, te time nadilazi zakone geometrijske optike. Slaganje tih valova dovodi do niza minimuma i maksimuma u kutnoj raspodjeli intenziteta svjetlosti, tj. do niza lukova slabijeg intenziteta smještenih ispod primarnog luka. Na taj su način barem kvalitativno objašnjene sve pojave vezane uz atmosfersku dúgu, dok se na točan matematički opis čekalo do sredine 19. stoljeća. Sir Airy preko tzv. integrala dúge ili Airyeve funkcije kvantitativno opisuje intenzitet raspršene svjetlosti u ovisnosti o kutu raspršenja.

Einstein 1905. godine objavljuje svoj rad o fotoelektričnom efektu, pokazujući da se svjetlost u određenim uvjetima mjerenja ponaša kao snop kvantiziranih čestica, fotona. De Broglie, 1924. g., postavlja smjelu hipotezu prema kojoj svaka čestica koja se giba, osim čestičnih, posjeduje i valna svojstva:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{2}$$

gdje je λ valna duljina, m masa mirovanja, h Planckova konastanta, p impuls i v brzina. Slijedeći tu eksperimentalno dokazanu tvrdnju, snop čestica lomi se i raspršuje pri sudaru s drugim česticama, atomima i jezgrama, u skladu sa svojom valnom prirodom. Opažanje dúgi istovrsnih pojava, tj. posljedica loma i raspršenja snopa atoma i atomskih jezgara na drugim sličnim česticama, atomima i jezgrama, pokazatelj je stupnja prozirnosti materije, omogućene upravo zakonitostima kvantne fizike.

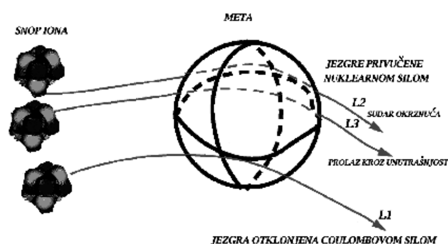
Dvije su bitne razlike pri usporedbi raspršenja svjetlosti na prozirnim kapljicama vode i pojavi atomske i nuklearne dúge. Prva je upravo u stupnju prozirnosti. Voda je prozirna za valne duljine vidljive svjetlosti, dok prilikom sudara čestice s drugim česticama dolazi do pojave apsorpcije, tj. prigušenja ulaznog toka. To prigušenje događa se jer se dio energije koju gibajuće čestice donose u sistem pretvara u energiju pobuđenja samog sistema (recimo neelastično pobuđenje jezgre méte, ili otvaranje drugih kanala reakcije, kao reakcije prijenosa nukleona između jezgara snopa i méte). Druga glavna razlika odnosi se na indeks loma. Dok kod atmosferske dúge dva različita sredstva imaju oštru granicu i svako je određeno svojim indeksom loma, u slučaju sudara dviju čestica ulogu indeksa loma preuzima sila međudjelovanja koja djeluje postupno, ali konstantno kako se čestice jedna drugoj približavaju. Tako da se indeks loma može napisati preko potencijala kao funkcije udaljenosti čestica, tj.

$$n(r) = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{E_0 - \frac{V(r)}{E_0}}, \tag{3}$$

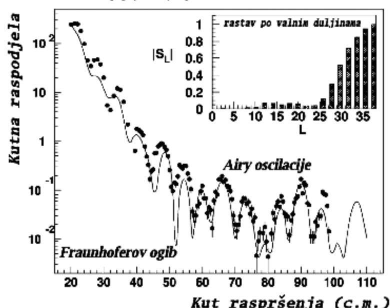
gdje su λ_0 i E_0 valna duljina i energija čestice na velikim udaljenostima gdje je međudjelovanje znemarivo, a $V(r)$ je potencijal između čestica koja također ovisi o njihovoj međusobnoj udaljenosti (r). Proučavanje ovih pojava u atomskoj i nuklearnoj fizici od velike je važnosti jer nam neposredno daje uvid u svojstva sile međudjelovanja, njenoj jačini i dosegu.

Atomske jezgre masivni su složeni objekti koji podliježu zakonitostima kvantne fizike, kako u opisivanju jezgara kao cjelina, tako i u opisivanju gibanja sastavnih dijelova, nukleona. Proučavanje nuklearne tvari, te modeliranje svojstava jezgara, njihovih radijusa, energija vezanja i energetskih nivoa osniva se na egzaktnom poznavanju međudjelovanja između pojedinog nukleona i njegovog okruženja, nuklearne tvari. Upravo podaci prikupljeni proučavanjem dúgi sličnih pojava, gdje jezgre međudjeluju i prodiru jedna kroz drugu, predstavljaju jedinstveni izvor saznanja o sili koja djeluje između nukleona u nuklearnoj tvari.

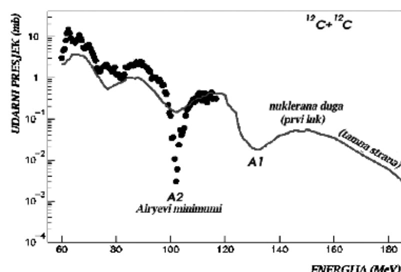
NUKLEARNA DUGA



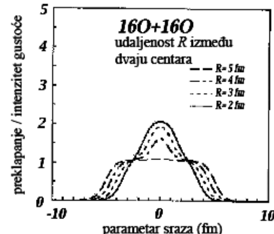
16O+16O
103.1 MeV



12C+12C
(udarni presjek za 85°-95°)



Preklapanje jezgara



Slika 3. Nuklearna dúga.
U lijevom gornjem kutu nalazi se shematski prikaz sudara atomskih jezgara na kojem se vide putanje otklonjene Coulombovom silom (L1), te dvije različite putanje privučene nuklearnom silom, od kojih jedna (L3) duboko prodire u jezgru. Slaganje ovih putanja u udarnim presjecima prepoznaje se kao Fraunhoferova ogibna oscilacija (L1 interferira s L2) i Airyjeve oscilacije (L2 interferira s L3). Primjer udarnih presjeka mjerenih pri sudaru jezgara α*-podstrukture,* ^{12}C *i* ^{16}O *vide se na grafovima u gornjem desnom i donjem lijevom uglu. Jezgra ugljika* ^{12}C *sastavljena je od 6 protona i 6 neutrona, a neka od njezinih stanja moguće je opisati preko grozda 3* α*-čestice. Isto tako, jezgra kisika* ^{16}O *može se prikazati kao grozd sastavljen od 4* α*-čestice. Prikazana mjerenja izvršena su na Van der Grraffovom akceleratoru u Strasbourgu. Na difrencijalnom udarnom presjeku sudara jezgara* $^{16}O+^{16}O$ *prikazanom u ovisnosti o kutu raspršenja, jasno se vidi Fraunhoferova difrakcija oštrijih oscilacija kraćeg perioda na prednjim kutovima, te Airyjeve oscilacije dužeg perioda koje se za ovu energiju pojavljuju na većim kutovima. U umetnutom okviru vidi se rastav udarnog presjeka na valne duljine koje mu doprinose (ekvivalentno rastavu sunčeve svjetlosti na pripadajuće boje), od duboko prodirućih putanja manjih valnih duljina do putanje okrznuća. Lijevo dolje nalazi se prikaz udarnog presjeka jezgara* $^{12}C+^{12}C$ *(zbrojen oko 90°) kao funkcija energije snopa, a položaji primarnog luka i prvog i drugog Airyjevog minimuma su obilježeni na slici.*
Desno dolje nalazi se graf koji prikazuje gustoće preklapajućih atomskih jezgara do kojih dolazi u slučaju kada su opaženi refraktivni efekti. Za centralne sudare gustoća je bliska dvostrukoj gustoći svake od jezgara zasebno, potvrđujući da pojavljivanje nuklearne dúge u sudarima atomskih jezgara omogućuje uvid u unutrašnjost jezgara i proučavanje nuklerane tvari u ekstremnim uvjetima.

U nuklearnoj fizici sudari dviju jezgara, ovisno o njihovoj strukturi i energiji, obično su popraćeni snažnom apsorpcijom. Veliki dio ulaznog toka pretvara se bilo u

energiju pobuđenja ili odlazi u druge reakcijske kanale, kao fuziju, stvaranje složene jezgre ili reakcije prijenosa nukleona. (Apsorpcija dovodi do pojavljivanja minimuma i maksimuma u mjerenoj kutnoj ovisnosti presjeka, slično kao kod ogiba, te se i naziva Fraunhoferovo difraktivno raspršenje.) U rijetkim slučajevima sudara lakših jezgara pojavljuje se smanjena apsorpcija zbog prisutne α-podstrukture (α-čestica, jezgra ^{4}He, posjeduje veliku energiju vezanja nukleona). Refraktivni efekti posebno su opazivi u raspršenjima α-čestica na jezgrama α-podstrukture (jezgre višekratnici α-čestica) ili međusobnim sudarima jezgara α-podstruktura. U sudaru atomskih jezgara, ioni snopa (više ili manje od elektronskog omotača ogoljeni atomi) nalaze se pod utjecajem dviju sila, elektromagnetskog Coulombovog polja, koje zbog istovrsnog naboja odbija jezgre snopa od onih u méti, te privlačne nuklearne sile koja uzrokuje pojavu refraktivnih efekata. Slično kao i kod atmosferske dúge, postoji neki kritični maksimalni kut raspršenja jezgara snopa na jezgrama méte. To odgovara jezgrama snopa koje su najsnažnije odbijene od jezgara méte. Taj kut naziva se kut nuklearne dúge i određen je prije svega upravo međudjelovanjem nukleona smještenih u dvije sudarajuće jezgre. Ponovo za svaki kut manji od kritičnog postoje dvije zamišljene putanje različitih upadnih parametara, koje se svijaju pod djelovanjem sile u isti kut. Tim različitim putanjama pridruženi su različiti kutni momenti gibanja koji se prema de Broglijevom postulatu mogu predstaviti kao različite valne duljine. Slaganje tih različitih valnih duljina proizvodi minimume i maksimume funkcije intenziteta ovisno o kutu raspršenja. Ovdje je vrlo važno naglasiti da ukoliko ne postoji duboko prodiranje jezgara snopa u jezgre méte (tj. kada je apsorpcija velika), unutrašnja putanja s ulaznim parametrom manjim od kritičnog (bliže centralnim sudarima) neće preživjeti sudar, te će interferencija izostati. Pojava nuklearne dúge u energijskoj i kutnoj ovisnosti presjeka jedinstveni je potpis unutrašnjosti jezgara u procesu njihovog snažnog preklapanja.

⋆ ⋆ ⋆

Potpuni kvadrati

Pozitivni cijeli broj naziva se *potpuni* ako njegov kvadrat u dekadskom prikazu sadrži svaku od deset znamenaka, i to točno jedanput. Takvih brojeva ima čak 87! Napravite program i uz pomoć računala nađite sve tražene brojeve. Da li postoji neki prost broj s tim svojstvom?

Evo tih brojeva:

32043,	32286,	33144,	35172,	35337,	35757,	35853,	37176,
37905,	38772,	39147,	39336,	40545,	42744,	43902,	44016,
45567,	45624,	46587,	48852,	49314,	49353,	50706,	53976,
54918,	55446,	55524,	55581,	55626,	56532,	57321,	58413,
58455,	58554,	59403,	60984,	61575,	61866,	62679,	62961,
63051,	63129,	65634,	65637,	66105,	66276,	67677,	68763,
68781,	69513,	71433,	72621,	75759,	76047,	76182,	77346,
78072,	78453,	80361,	80445,	81222,	81945,	83919,	84648,
85353,	85743,	85803,	86073,	87639,	88623,	89079,	89145,
89355,	89523,	90144,	90153,	90198,	91248,	91605,	92214,
94695,	95154,	96702,	97779,	98055,	98802,	99066.	

Ovo je jedan od zadataka iz knjige Jean-Marie De Konick, Armel Mercier, *1001 Problems in Clasical Number Theory*.



MATEMATIKA

IZ PERA VRHUNSKIH ZNANSTVENIKA

William Feller, Uvod u teoriju vjerojatnosti i primjene, I., (2)

Maja Sekulić[1], *Zagreb*

POGLAVLJE I.

Prostor elementarih događaja

1. Iskustvena pozadina

Matematička teorija vjerojatnosti doseže praktičnu vrijednost i intutivno značenje vezano uz stvarne i konceptualne pokuse kao što su bacanje novčića jednom, bacanje novčića 100 puta, bacanje triju numeriranih kocaka, podjela špila karata, uparivanje dvaju špilova karata, igra ruleta, proučavanje vremena poluraspada radioaktivnog atoma ili životnog vijeka osobe, odabir slučajnog uzorka ljudi i promatranje broja ljevorukih osoba u tom uzorku, križanje dviju vrsta biljaka i praćenje fenotipskih promjena na potomcima; ili uz fenomene poput predviđanja spola novorođenčeta, broja zauzetih telefonskih linija na centrali, slučajnih šumova u komunikacijskim sustavima, rutinske kontrole kakvoće proizvodnog procesa, učestalosti prometnih nesreća, broja dvostrukih zvijezda unutar određene regije nebeske karte, kretanja čestice tijekom difuzije. Svi prethodno navedeni opisi prilično su neodređeni i u svrhu predstavljanja cjelokupnog značenja teorije, moramo se dogovoriti što smatramo mogućim ishodima promatranog pokusa ili proučavanja.

Kad bacimo novčić, on neće nužno pasti na glavu ili pismo; može se primjerice otkotrljati, ili pasti te ostati stajati na rubu. Unatoč tomu, trebali bismo se složiti, da su "glava" i "pismo" jedini mogući ishodi pokusa. Ovakav dogovor pojednostavnjuje teoriju, bez narušavanja njene primjenjivosti. Idealizacije ovog tipa su uobičajene. Nemoguće je mjeriti vrijeme poluraspada radioaktivnog atoma ili životni vijek čovjeka, bez stanovitih pogrešaka, no u svrhu teorijskih razmatranja, koristimo se sredstvima koja dopuštaju predstavljanje takvih veličina konkretnim brojevima. Tada iskrsava pitanje: koji bi to brojevi dosljedno mogli predočavati životni vijek čovjeka? Zar postoji neka konačna dob nakon koje je život nemoguć, ili je bilo koja dob odgovarajuća? Nismo skloni priznati da čovjek može poživjeti 1000 godina, iako trenutna predviđanja ne postavljaju granice mogućem trajanju ljudskog života. S formulama na kojima se zasnivaju suvremene

[1] Autorica je studentica Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Kao seminarski rad (voditelj prof. dr. sc. Darko Žubrinić) prevela je uvodni dio trećeg izdanja knjige William Feller, An Intrroduction to Probability Theory and Its Applications, 1968. E-mail: `Maja.Sekulic@fer.hr`

tablice smrtnosti, život od 1000 godina, stoji u odnosu koji je reda veličine $10^{10^{36}}$ – što je broj s 10^{27} milijardi nula. Takva pretpostavka nije smislena s biološkog ili sociološkog gledišta, ali promatrano s čisto statističkog stajališta, sigurno ne proturječi iskustvima. U jednom stoljeću rodi se manje od 10^{10} ljudi. Da bismo statistički ispitali tvrdnju, bilo bi potrebno više no $10^{10^{35}}$ stoljeća, što je više od $10^{10^{34}}$ života Zemlje. Očito, tako krajnje malene vjerojatnosti poistovjećuju se s našim poimanjem nemogućnosti. Upotreba takvih vjerojatnosti može se činiti krajnje besmislenim, ali ne šteti, a može poslužiti pri pojednostavnjivanju mnogih formula. Štoviše, kada bismo potpuno odbacili mogućnost življenja 1000 godina, morali bismo prihvatiti postojanje do neke granične starosti, i pretpostavka da bi trebalo biti moguće živjeti nekih x godina, a nemoguće živjeti x godina i dvije sekunde, neprivlačna je ideji o neograničenom životu.

Svaka teorija nužno uključuje idealizacije, i naša prva odnosi se na moguće ishode "pokusa" ili "promatranja". Ukoliko želimo konstruirati apstraktni model, na početku moramo donijeti odluku o ustanovljenim mogućim ishodima (idealiziranog) pokusa.

Da bi se usuglasila terminologija, rezultati pokusa ili promatranja nazivat će se *događajima*. Stoga ćemo govoriti o događaju, kad od pet bačenih novčića, tri padnu kao glava. Slično, "pokus" podjele karata u *Bridžu*[2] može rezultirati "dogadajem": Sjever ima dva asa. Sastav uzorka ("dva ljevaka u uzorku od 85") i rezultat mjerenja ("temperatura od 120°", "sedam telefonskih linija je zauzeto") oba se mogu nazivati događajem.

Trebali bi razlikovati *složene* (ili rastavljive) i *jednostavne* (ili nerastavljive) *događaje*. Na primjer, reći da bacanje dviju kocaka rezultira "sumom šest" istovjetno je tvrdnji da je pokus rezultirao s "(1,5) ili (2,4) ili (3, 3) ili (4, 2) ili (5,1)", i ovakvo pobrojavanje rastavlja događaj "suma je šest" u pet jednostavnih događaja. Slično tomu, događaj "pala su dva neparna broja" čini rastav "(1,1) ili (1,3) ili ... ili (5,5)" u devet jednostavnih događaja. Primijetite da, ako bacanje za ishod ima (3,3), tada *isto bacanje* ima za ishod događaje "suma je šest" i "pala su dva neparna broja"; ovi događaji nisu međusobno isključivi i stoga mogu nastupiti istovremeno. Kao drugi primjer promotrimo starosnu dob osobe. Svaka pojedina vrijednost x predstavlja *jednostavan* događaj, dok nasuprot tome izjava da je osoba u svojim pedesetima opisuje složeni događaj u kojem se x nalazi između 50 i 60. Na taj način svaki složeni događaj može se rastaviti na jednostavnije događaje, što će reći, složeni događaj je *skup određenih jednostavnih događaja*.

Ako želimo raspravljati o "pokusima" ili "promatranjima" na teorijski način i bez dvosmislenosti, moramo se složiti da jednostavni događaji predstavljaju ishode koje bismo mogli očekivati; i *oni definiraju idealni pokus*. Drugačije rečeno: pojam jednostavan (ili nerastavljiv) događaj ostaje nedefiniran, isto kao što točka i crta ostaju nedefinirani u geometriji. U skladu s općom upotrebom u matematici *jednostavni događaji nazivaju se elementarnim događajima*. Po definiciji, *svaki nerastavljiv ishod idealnog pokusa predstavlja jedan, i samo jedan, elementarni događaj*. Skup svih elementarnih događaja naziva se prostor elementarnih događaja. Svi događaji, vezani uz promatrani idealizirani pokus, mogu se opisati kao skupovi elementarnih događaja.

Prije usvajanja ovih osnovnih postavki, nastavljamo raspravu uz nekoliko tipičnih primjera koji će nadalje imati značajniju ulogu.

---

[2] *Definicija Bridža i Pokera.* Špil karata u Bridžu sastoji se od 52 karte raspoređene u četiri boje od po trinaest karata. U svakoj boji karte poprimaju trinaest vrijednosti (2, 3,...,10, dečko, kraljica, kralj, as). Boje se pojedinačno nazivaju pik, tref, herc, karo. Posljednje dvije su crvene, prve dvije crne. Karte koje u različitim bojama imaju jednaku vrijednost, nazivaju se kartama iste jakosti. Za naše potrebe, igranje bridža značit će podjelu karata četirima igračima, koje ćemo nazvati Sjever, Jug, Istok i Zapad (ili kraće, S, J, I, Z), tako da svaki dobije trinaest karata. Igranje Pokera, po definiciji, podrazumijeva odabir pet karata iz špila.

2. Primjeri

(a) *Razdioba triju kuglica u tri kutije.* Tablica 1 opisuje sve moguće ishode "pokusa" razmještaja tri kuglice u tri kutije. Svaki od ovih razmještaja predstavlja jednostavan događaj, tj. elementaran događaj. Događaj A "u jednoj od kutija je više kuglica" realizira se u razmještajima numeriranim 1–21, a to iskazujemo riječima da je događaj A skup elementarnih događaja 1–21. Slično tomu, događaj B "prva kutija nije prazna", skup je elementarnih događaja 1, 4-15, 22-27.

1. $\{abc\|-\|-\}$	10. $\{a\|bc\|-\}$	19. $\{-\|a\|bc\}$
2. $\{-\|abc\|-\}$	11. $\{b\|ac\|-\}$	20. $\{-\|b\|ac\}$
3. $\{-\|-\|abc\}$	12. $\{c\|ab\|-\}$	21. $\{-\|c\|ab\}$
4. $\{ab\|c\|-\}$	13. $\{a\|-\|bc\}$	22. $\{a\|b\|c\}$
5. $\{ac\|b\|-\}$	14. $\{b\|-\|ac\}$	23. $\{a\|c\|b\}$
6. $\{bc\|a\|-\}$	15. $\{c\|-\|ab\}$	24. $\{b\|a\|c\}$
7. $\{ab\|-\|c\}$	16. $\{-\|ab\|c\}$	25. $\{b\|c\|a\}$
8. $\{ac\|-\|b\}$	17. $\{-\|ac\|b\}$	26. $\{c\|a\|b\}$
9. $\{bc\|-\|a\}$	18. $\{-\|bc\|a\}$	27. $\{c\|b\|a\}$

Tablica 1

Događaj C definiran kao "istovremeno su se ostvarili događaji A i B" jest skup trinaest elementarnih događaja 1, 4-15. Baš u ovdje navedenom primjeru, slučaj je, da svaki od 27 elementarnih događaja, potpada ili pod A, ili pod B (ili oba); stoga, događaj "ostvario se ili događaj A, ili događaj B, ili su se ostvarila oba" čini potpuni prostor elementarnih događaja i ostvaruje se s potpunom sigurnošću. Događaj D definiran kao "A se neće ostvariti", sastoji se od elementarnih događaja 22-27 i opisan je uvjetom da niti jedna kutija ne smije ostati prazna. Događaj "prva kutija je prazna i niti jedna kutija ne sadrži više od jedne kuglice" jest nemoguć (ne može se ostvariti), jer niti jedan elementarni događaj ne zadovoljava njegove uvjete.

(b) Nasumična raspodjela r kuglica u n kutija. Općenitiji slučaj, s r kuglica i n kutija, može se promotriti na isti način, s tim, da broj mogućih raspodjela naglo raste kako rastu r i n. Za $r = 3$ kuglice i $n = 4$ kutije, prostor elementarnih događaja sadrži čak 81 elementarni događaj, a za $r = n = 10$ postoji 10^{10} elementarnih događaja; potpun tablični prikaz zahtijevao bi nekoliko stotina tisuća velikih svezaka.

Ovaj primjer koristimo kako bismo prikazali važnu činjenicu, a to je, da priroda elementarnih događaja nije bitna za našu teoriju. Upotreba prostora elementarnih događaja (zajedno s razdiobom vjerojatnosti definiranom unutar njega) *definira* idealizirani pokus. Koristimo se slikovitim jezikom kuglica i kutija, ali isti prostor elementarnih događaja odgovara velikoj različitosti praktičnih interpretacija. Da bismo razjasnili ovo stajalište, i također za buduće reference, *ovdje navodimo neke situacije čija intuitivna pozadina varira; no koje su sve, ipak, apstraktno istovjetne shemi razmještaja r kuglica u n kutija, u smislu da se ishodi razlikuju jedino u njihovim usmenim opisima.* Odgovarajuće pridruživanje vjerojatnosti, nije isto u svim slučajevima, i bit će raspravljeno kasnije.

(b,1) *Rođendani.* Moguće raspodjele rođendana r osoba odgovaraju različitim raspodjelama r kuglica u $n = 365$ kutija (uz pretpostavku da godina ima 365 dana).

(b,2) *Nesreće.* Raspored r nesreća prema danu u tjednu kada su se odigrale, jednako je razmještaju r kuglica u $n = 7$ kutija.

(b,3) *Ispaljivanje* hitaca u n meta, pogodci odgovaraju kuglicama, a mete kutijama.

(b,4). *Uzorkovanje*. Razvrstajmo grupu od r ljudi prema, recimo, starosti ili zanimanju. Razredi raspodjele imaju ulogu naših kutija, a ljudi ulogu kuglica.

(b,5) *Medicinska upotreba radijacije u biologiji*. Kada se stanice mrežnice izlože svjetlosti, čestice svjetlosti igraju ulogu kuglica, a stanice su u ulozi kutija našeg modela. Slično, pri proučavanju utjecaja radijacije na genetički materijal, kromosomi odgovaraju kutijama našeg modela, a α-čestice kuglicama.

(b,6) U *pokusima s kozmičkim zrakama* čestice koje dospiju do Geigerova brojača predstavljaju kuglice, dok brojač funkcionira kao kutije.

(b,7) *Dizalo* kreće s r osoba i stane na n katova. Različite raspodjele izlazaka putnika su replike različitih raspodjela r kuglica u n kutija.

(b,8) *Numerirana kocka*. Mogući ishodi bacanja r kocaka istovjetno je razmještaju r kuglica u $n = 6$ kutija. Pri *bacanju novčića* zapravo se radi o razmještaju u samo dvije kutije.

(b,9) *Nasumični nizovi znamenaka*. Mogući poredci slijeda od r znamenaka odgovaraju raspodjeli r kuglica($=$ mjesta) u 10 kutija označenih s 0, 1, ..., 9.

(b,10) *Brojčani odnos spolova* u grupi od r osoba. Ovdje imamo 2 kutije i r kuglica.

(b,11). *Skupljanje kupona*. Različite vrste kupona predstavljaju kutije; broj prikupljenih kupona predstavlja kuglice.

(b,12) *Asevi u igri bridža*. Četiri igrača predstavljaju četiri kutije, i imamo $r = 4$ kuglice.

(b,13) *Raspodjela gena*. Svaki potomak individue (čovjeka, biljke, ili životinje) nasljeđuje od pretka određene gene. Ako se pojedini gen može pojaviti u n oblika $A_1, \dots, A_n$, tada se potomci mogu razvrstati na temelju tipova jednoga gena. Potomci su u korespondenciji s kuglicama, genotipi $A_1, \dots, A_n$ s kutijama.

(b,14) *Kemija*. Pretpostavimo da lanac polimera reagira s kisikom. Jedan lanac može reagirati s 0, 1, 2,... molekula kisika. Ovdje molekule kisika, koje će s njim reagirati, imaju ulogu kuglica, a lanci polimera ulogu kutija u koje će kuglice biti razmještene.

(b,15) *Teorija fotografskih emulzija*. Fotografska ploča prekrivena je zrncima tvari osjetljivih na fotone: zrno reagira ako ga pogodi određeni broj, r, fotona. U teoriji tvrdog crno-bijelog kontrasta, moramo znati koliko ćelija će biti pogođeno s r fotona. Ovdje imamo problem zaposjednuća gdje zrnca odgovaraju kutijama, a fotoni kuglicama. (Zapravo, situacija je malo kompliciranija budući da ploča sadrži zrnca različitih osjetljivosti.)

(b,16) *Tiskarske pogreške*. Moguća raspodjela r tiskarskih pogrešaka na n stranica knjige odgovara svim mogućim razmještajima r kuglica u n kutija, pod pretpostavkom da je r manji od broja slova po stranici.

(c) *Slučaj razmještaja u kojem se kuglice međusobno ne razlikuju.* Vratimo se na slučaj (a) i pretpostavimo da međusobno ne razlikujemo tri kuglice. To znači da više ne razlikujemo tri raspodjele, kao što su 4, 5, 6, i stoga Tablica 1 prelazi u Tablicu 2. Potonja definira prostor elementarnih događaja idealiziranog pokusa koji nazivamo "raspodjela triju istovjetnih kuglica u tri kutije", i sličan postupak primjenjuje se za slučaj r kuglica u n kutija.

1. $\{***\|-\|-\}$	6. $\{*\|**\|-\}$
2. $\{-\|***\|-\}$	7. $\{*\|-\|**\}$
3. $\{-\|-\|***\}$	8. $\{-\|**\|*\}$
4. $\{**\|*\|-\}$	9. $\{-\|*\|**\}$
5. $\{**\|-\|*\}$	10. $\{*\|*\|*\}$

Tablica 2

Mogu li se ili ne mogu, doista kuglice razlikovati u praksi, nebitno je za našu teoriju, čak i ako se mogu razlikovati, mi možemo odlučiti da ih smatramo istovjetnima. Asevi u igri Bridža (primjer (b, 12)) ili ljudi u dizalu (primjer (b, 7)) svakako su takvi da u njima možemo razlikovati objekte koje raspoređujemo, pa ipak se često nastoji tretirati ih kao istovjetne. Kocke iz primjera (b, 8) mogle bi biti obojene kako bismo ih razlikovali, no svejedno, da li pri razmatranju određenog problema koristimo model u kojem razlikujemo ili onaj u kojem ne razlikujemo kuglice, čisto je stvar svrhe i prikladnosti. Priroda konkretnog problema određuje izbor, ali pod bilo kakvim uvjetima, naša teorija započinje tek nakon što je odabran odgovarajući model, odnosno, nakon što je definiran prostor elementarnih događaja.

U gornjoj shemi razmatrali smo kuglice koje ne razlikujemo, ali Tablica 2 svejedno zadržava prvu, drugu i treću kutiju, i njihov poredak je bitan. Možemo učiniti korak naprijed i pretpostaviti da su čak i kutije nerazlučive (na primjer, kutija se može nasumično odabrati bez obaziranja na njen sadržaj). Ako ne razlikujemo međusobno ni kuglice ni kutije, moguće su samo tri različite raspodjele, $\{***|-|-\}$, $\{**|*|-\}$, $\{\,*\,|\,*\,|\,*\,\}$.

(d) *Uzorkovanje*. Pretpostavimo da je izabran uzorak od 100 ljudi kako bi se utvrdio broj pušača. Jedina bitna značajka interesnog uzorka, u tom slučaju, jest broj x ljudi koji puše; to može biti cjelobrojna vrijednost između 0 i 100. U ovom slučaju, možemo se složiti, da se naš prostor elementarnih događaja sastoji od 101 elementarnog događaja: $0, 1, \ldots, 100$. Svaki uzorak ili proučavanje u potpunosti je određeno odgovarajućim x-om. Primjer složenoga događaja jest rezultirajući događaj "u odabranom uzorku većina su pušači". To znači da je pokus rezultirao jednim od pedeset elementarnih događaja $51, 52, \ldots, 100$, ali se izričito ne kaže kojim. Slično tomu, svako obilježje uzorka može se opisati brojčanim ekvivalentima pojedinih slučajeva ili elementarnim događajima. Radi jednoznačnosti terminologije, govorimo radije o događajima nego o značajkama uzorka. Matematički gledano, događaj je jednostavno skup odgovarajućih elementarnih događaja.

(e)*Uzorkovanje* (*po višestrukim obilježjima*). Pretpostavimo sada da se 100 ljudi u našem uzorku ne razdjeljuje samo na pušače i nepušače, već i prema spolu na muškarce i žene. Uzorak se sada može okarakterizirati uređenom, cjelobrojnom četvorkom (M_p, $Ž_p$, M_n, $Ž_n$) koja sadrži broj muškaraca i žena pušača i muškaraca i žena nepušača. Za prostor elementarnih događaja uzimamo uređene četvorke brojeva iz intervala od 0 do 100, kojima je zbroj 100. Takvih četvorki ima 176 851 i sačinjavaju polje elementarnih događaja (usporedi s II., 5). Događaj "relativno puši više muškaraca nego žena" znači da je u našem uzorku omjer M_p/M_n veći od omjera $Ž_p/Ž_n$. Elementarni događaj $(73, 2, 8, 17)$ ima to obilježje, dok $(0, 1, 50, 49)$ nema. U principu, naš događaj može se opisati navođenjem svih uređenih četvorki sa željenim obilježjima.

(f) *Bacanje novčića*. Za pokus bacanja novčića tri puta, prostor elementarnih događaja sastoji se od osam događaja koji se, u svrhu pojednostavnjenja, mogu prikazati kao *GGG*, *GGP*, *GPG*, *PGG*, *GPP*, *PGP*, *PPG*, *PPP*. Događaj A, "pale su dvije ili više glava", skup je prvih četiriju elementarnih događaja. Događaj B, "palo je samo jedno pismo", znači da je palo redom ili GGP, ili GPG, ili PGG; kažemo da B sadrži ta tri elementarna događaja.

(g) *Starosna dob supružnika.* Osiguravajuća tvrtka se zanima za dobnu raspodjelu parova. Neka x predstavlja starost supruga, a y starost supruge. Svako istraživanje rezultira uređenim parom (x,y). Kao skup elementarnih događaja, uzmimo prvi kvadrant pravokutne koordinatne ravnine, tako da je svaka točka za koju je $x > 0$ i $y > 0$ elementarni događaj. Događaj A "muž je stariji od 40 godina", predstavljaju sve točke desno od pravca $x = 40$; događaj B "suprug je stariji od supruge", predstavljen je površinom unutar kuta koji zatvaraju x-os i pravac $y = x$, odnosno skupom točaka za koje vrijedi $x > y$; događaj C, "supruga je starija od 40 godina" predstavljaju sve točke iznad pravca $y = 40$. Geometrijska interpretacija razdiobe starosti za dva para zahtijeva četverodimenzionalni prostor.

(h) *Prostor faza.* U statističkoj mehanici, svako moguće stanje sustava naziva se "točkom u faznom prostoru". Jedina razlika je u nazivlju. Prostor faza je jednostavno naš prostor elementarnih događaja; njegove točke su naši elementarni događaji.

3. Prostor elementarnih događaja. Događaji

Iz prethodnog poglavlja trebalo bi biti jasno da nikad nećemo govoriti o vjerojatnostima, osim u vezi s danim prostorom elementarnih događaja (ili, mentalno, u vezi s određenim apstraktnim pokusom). *Počinjemo s idejom prostora elementarnih događaja i elementarnih događaja; koje ćemo od sada dalje smatrati poznatima. To su primitivni i nedefinirani pojmovi teorije* kao što i pojmovi "točke" i "pravca" ostaju nedefinirani u okvirima aksiomatske Euklidove geometrije. Priroda elementarnog događaja ne zadire u našu teoriju. Prostor elementarnih događaja osigurava model idealnog pokusa u smislu da je, po definiciji, *svaki zamislivi ishod pokusa u potpunosti opisan jednim, i samo jednim, elementarnim događajem.* Ima smisla govoriti o događaju A samo kad je jasno za *svaki* ishod pokusa je li događaj A nastupio ili nije. Skup svih onih elementarnih događaja, koji predstavljaju ishode u kojima se A ostvario, u potpunosti opisuje događaj. Obrnuto, bilo koji dani skup A koji sadrži jedan ili više elementarnih događaja može se nazvati događajem; taj događaj se ostvaruje, ili ne ostvaruje, ovisno o tome da li je ishod pokusa predstavljen, ili nije, elementarnim događajem iz skupa A. Stoga, definiramo riječ *događaj u značenju skupa elementarnih događaja*. Trebali bismo reći da se *događaj A sastoji od* (*ili da sadrži*) *određenih elementarnih događaja*, što će reći onih koji predstavljaju ishode idealiziranog pokusa u kojem se A ostvaruje.

Primjer. U prostoru elementarnih događaja iz primjera (2.a) promotrimo događaj U koji se sastoji od elementarnih događaja označenih s 1, 7, 13. To je formalna i izravna definicija, ali U se može opisati na mnogo istovjetnih načina. Na primjer, U može biti definiran kao događaj koji zadovoljava sljedeća tri uvjeta: (1) druga kutija je prazna, (2) kuglica a je u prvoj ćeliji, (3) kuglica b ne pojavljuje se nakon c. Svaki od ovih uvjeta za sebe opisuje neki događaj. Događaj U_1 definiran samo uvjetom (1) sastoji se od elementarnih događja 1, 3, 7-9, 13-15. Događaj U_2, definiran preko (2), sastoji se od elementarnih događaja 1, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 22, 23; i događaj U_3, definiran s (3), sadrži elementarne događaje 1-4, 6, 7, 9-11, 13, 14, 16, 18-20, 22, 24, 25. Događaj U može se također opisati i kao *istovremena realizacija* triju događaja U_1, U_2, U_3.

Izrazi "elementarni događaj" i "događaj" imaju intuitivnu predodžbu, ali aludiraju na poimanja točke i skupa točaka, zajednička svim područjima matematike.

Vidjeli smo u prethodnom primjeru i u primjeru (2.a) da se novi događaji mogu definirati u terminima dvaju ili više danih događaja. Imajući ove primjere na umu, nastavljamo s upoznavanjem pojma formalne *algebre događaja* (odnosno, algebre skupova).

4. Odnosi među događajima

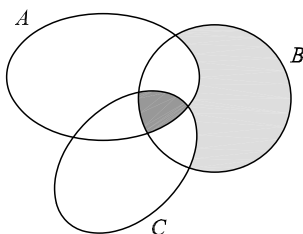
Trebali bismo sada pretpostaviti da je zadan proizvoljan, ali stalan, prostor elementarnih događaja Ω. Da bismo označili *događaje*, odnosno skupove elementarnih događaja, koristimo velika slova. Činjenica da je elementarni događaj x sadržan u događaju A, označava se s $x \in A$. Pa je $x \in \Omega$ za svaki elementarni događaj x. Pišemo $A = B$ samo ako se ta dva događaja sastoje od potpuno istih elementarnih događaja.

Općenito, događaji će biti definirani određenim uvjetima postavljenim nad njihovim elementarnim događajima, i bilo bi prikladno imati neki simbol koji će označavati da niti jedan elementarni događaj ne zadovoljava skup zadanih uvjeta. Sljedeća definicija služi definiranju takvog simbola.

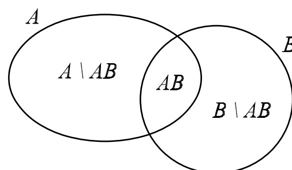
Definicija 1. *Oznaku $A = 0$ koristimo kako bismo iskazali da događaj A ne sadrži niti jedan elementarni događaj* (*odnosno, da je taj događaj nemoguć*). Nulu treba interpretirati kroz simboličko, a ne kroz numeričko, značenje.

Svakom događaju A odgovara drugi događaj definiran uvjetom "A nije nastupio". On sadrži sve elementarne događaje koji nisu sadržani u A.

Definicija 2. *Događaj koji se sastoji od svih elementarnih događaja koji nisu sadržani u A, naziva se suprotan događaj (ili komplement) događaja A i označava se s A'. Posebno, $\Omega' = 0$.*



Slika 1.



Slika 2.

Slike 1 i 2 ilustriraju veze između događaja. Na slici 1 domena, zajedno s tamnim šrafiranim područjem, je unija $A \cup B \cup C$. Trokutasta domena (tamno šrafirano) je presjek ABC. Svijetlo šrafirana domena je presjek od B i komplementa od $A \cup C$.

Bilo kojim dvama događajima A i B možemo pridružiti dva nova događaja definirana uvjetima "*oba događaja i A i B su se ostvarila*" i "*ili se ostvario A, ili B, ili oba*". Ti događaji će se označavati s AB i $A \cup B$, onako kako su navedeni. Događaj AB sadrži sve elementarne događaje koji su zajednički događaju A i događaju B. Ako se A i B međusobno isključuju, tada nemaju zajedničkih elementarnih događaja i događaj AB je nemoguć; analitički, ta se situacija izražava jednakošću

$$AB = 0 \tag{1}$$

koju treba čitati kao "A i B su *međusobno isključivi*". Događaj AB' znači da se i A i B' ostvaruju, ili drugim riječima, da se ostvaruje A, ali ne i B. Slično, $A'B'$ znači da se ni A ni B nisu ostvarili. Događaj $A \cup B$ označuje da je nastupio barem jedan od događaja A i B; sadrži sve elementarne događaje osim onih koji ne pripadaju ni događaju A, ni događaju B.

U teoriji vjerojatnosti događaj AB možemo opisati kao istovremenu pojavu događaja A i događaja B. U standardnom matematičkom nazivlju AB naziva se (logički) presjek A i B. Slično tomu, $A \cup B$ jest unija A i B. Naše razmatranje prenosi se na slučajeve događaja $A, B, C, D, \ldots$.

Definicija 3. *Za svaku grupu* A, B, $C, \dots$ *događaja definiramo dva nova događaja kako slijedi. Skup elementarnih događaja od kojih svaki pripada svim zadanim događajima, označit ćemo kao* $ABC \dots$ *i nazvati presjekom*[3] *(ili istovremenom realizacijom)* A, B, $C, \dots$. *Skup elementarnih događaja koji pripadaju barem jednom od promatranih događaja, označava se kao* $A \cup B \cup C \dots$ *i naziva se unija (ili realizacija barem jednog) od danih događaja. Događaji* A, B, $C, \dots$ *su međusobno isključivi ako nikoja dva nemaju niti jedan zajednički elementarni događaj, tj. ako je* $AB = 0$, $AC = 0$, $BC = 0, \dots$.

Još nam nedostaje simbol koji će izražavati da A ne može nastupiti ako nije nastupio B, tj. da ostvarivanje A podrazumijeva ostvarenje B. To znači da je svaki elementarni događaj iz A sadržan u B. Sjetite se intuitivne analogije poput skupa svih majki, koji je podskup skupa svih žena: Sve majke su žene, ali sve žene nisu majke.

Definicija 4. *Simboli* $A \subset B$ *i* $B \supset A$ *su istovjetni i označavaju da je svaki elementarni događaj iz* A *sadržan u* B*; čitaju se, po slijedu kojim su navedeni, kao "*A *je sadržan u* B*" i "*B *sadrži* A*". Ako je tomu tako, možemo također pisati* $B - A$, *umjesto* BA', *kako bismo odredili događaj u kojem se* B, *ali ne i* A, *ostvaruje.*

Događaj $B - A$ sadrži sve one elementarne događaje koji su u B, ali nisu u A. Ovom oznakom možemo pisati $A' = \Omega - A$ i $A - A = 0$.

Primjeri. (a) Ako su A i B međusobno isključivi, tada ostvarivanje A povlači neostvarivanje B i obrnuto. Stoga, $AB = 0$ znači isto što i $A \subset B'$ i isto što i $B \subset A'$.

(b) Događaj $A - AB$ označava ostvarivanje A, ali ne i oba, A i B. Zato je $A - AB = AB'$.

(c) U primjeru (2.g), događaj AB označava da je suprug stariji od 40 godina i stariji od svoje žene; AB' označava da je on stariji od 40, ali *nije* stariji od svoje supruge. AB predstavlja konačno trapezoidno područje između x-osi i pravaca $x = 40$ i $y = x$, a događaj AB' je predstavljen kutnim područjem između pravaca $x = 40$ i pravca $y = x$, koji je uključen u granicu. Događaj AC znači da su oboje, i muž i žena, stariji od 40. Događaj $A \cup C$ označava da je barem jedno od njih starije od 40, a $A \cup B$ znači da je muž stariji od 40, ili, ako ne to, onda barem stariji od svoje žene (službenim jezikom, "suprugova dob premašuje 40 godina ili dob njegove žene, ovisno o tome koje je od to dvoje manje)".

(d) Neka je P_i u primjeru (2.a) događaj u kojem je kutija broj i prazna (ovdje je $i = 1, 2, 3$). Na sličan način, neka J_i, D_i, T_i označavaju događaj pri kojem je kutija i jednostruko, dvostruko ili trostruko zauzeta. Tada je $P_1P_2 = T_3$ i $J_1J_2 \subset J_3$ i $D_1D_2 = 0$. Primijetite da je također $T_1 \subset P_2$, itd. Događaj $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ definira uvjet da postoji barem jedna kutija koja je dvostruko zauzeta.

(e) *Bridž* (vidi bilješku 2). Neka su događaji A, B, C, D redom Sjever, Jug, Istok, Zapad ima barem jednog asa. Jasno je da barem jedan igrač ima asa. Tako da jedan ili više od ta četiri događaja moraju nastupiti. Stoga je $A \cup B \cup C \cup D = \Omega$ potpun prostor elementarnih događaja. Događaj $ABCD$ ostvaruje se ako, i samo ako, svaki igrač ima asa. Događaj "Zapad ima sva četiri asa", znači da niti jedan od tri događaja A, B, C nije nastupio; što je jednako kao da su istovremeno nastupili A', B', C' ili događaj $A'B'C'$.

(f) U primjeru (2.g) imamo $BC \subset A$: riječima, "ako je muž stariji od žene (B) i žena je starija od 40 (C), tada je muž stariji od 40 (A)". Kako se događaj $A - BC$ može izraziti riječima?

[3] Standardna matematička oznaka za presjek dvaju ili više skupova jest $A \cap B$ ili $A \cap B \cap C$, itd. Ovakva notacija prikladnija je za određene specifične svrhe (vidi IV, 1. volumena 2). Trenutno koristimo oznaku AB, ABC, itd., jer je spretnija za ispis.

Geometrija Minkowskog

Romana Capor, Željka Milin Šipuš, Zagreb

Geometrija koju obično koristimo je euklidska geometrija. Njemački filozof Immanuel Kant je rekao da je ona "u čovjekovoj prirodi". No, postoje i mnoge druge geometrije, kao primjerice hiperbolička, eliptička, geometrija Minkowskog, Galilejeva geometrija i druge. Tema ovog članka je geometrija Minkowskog, koja je zanimljiva kako matematičarima za istraživanje svojstava krivulja i ploha u toj geometriji, tako i fizičarima, jer je ona ambijentalni prostor za teoriju relativnosti.

Da bismo definirali geometriju Minkowskog, prisjetimo se nekih pojmova iz euklidske geometrije. Standardni analitički model za dvodimenzionalnu euklidsku geometriju je realni vektorski prostor $\mathbf{R}^2$. To je skup svih uređenih parova realnih brojeva za koje su definirane operacije zbrajanja, $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ i množenja realnim brojem, $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$.

U ovom kontekstu uređene parove (x_1,x_2) nazivamo vektorima, a realne brojeve λ skalarima. Uz navedene operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, u euklidskom prostoru definirana je još operacija tzv. *euklidskog skalarnog množenja vektora*. To je preslikavanje koje paru vektora (x_1,x_2), (y_1,y_2) pridružuje realan broj (skalar, otuda ime operacije) zadan sa

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=x_1y_1+x_2y_2.$$

Za euklidsko skalarno množenje vrijedi svojstvo: skalarni kvadrat $(x_1,x_2)^2=(x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2)$ uređenog para (x_1,x_2) je nenegativan realan broj

$$(x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2\geq 0.$$

Kada je skalarni kvadrat $(x_1,x_2)^2=(x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2)$ jednak 0? Očito, ako i samo ako je $(x_1,x_2)=(0,0)$. Spomenuta svojstva euklidskog skalarnog produkta nazivamo *pozitivna definitnost*. Ona omogućuju da u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^2$ pomoću skalarnog produkta definiramo duljinu (modul, normu) vektora $X=(x_1,x_2)$,

$$|X|=\sqrt{(x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

Duljina svakog vektora $X\in\mathbf{R}^2$ je očito nenegativan realan broj. Nul-vektor je jedini vektor duljine 0. Nadalje, pomoću duljine vektora, definiramo i *euklidsku udaljenost (metriku)* između X, Y kao $d(X,Y)=|X-Y|$.

Definirajmo sada dvodimenzionalnu geometriju Minkowskog. Analitički model za dvodimenzionalnu geometriju Minkowskog je ponovo realni vektorski prostor $\mathbf{R}^2$, ali uz zadani *Lorentzov skalarni produkt*

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=-x_1y_1+x_2y_2.$$

Prostor $\mathbf{R}^2$ sa zadanim Lorentzovim skalarnim produktom nazivamo *prostorom Minkowskog* i označavamo ga $\mathbf{R}^2_1$. Još ga nazivamo i pseudoeuklidskim prostorom. Napomenimo da se ponekad Lorentzov skalarni produkt definira i kao $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=x_1y_1-x_2y_2$.

Je li Lorentzov skalarni produkt pozitivno definitan? Uočavamo da nije. Realan broj

$$(x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2)=-x_1^2+x_2^2$$

može biti i pozitivan i negativan i jednak 0. Primjerice, $(0,1)\cdot(0,1)=1$, $(1,0)\cdot(1,0)=-1$, $(1,1)\cdot(1,1)=0$.

Zbog toga u prostoru Minkowskog $\mathbf{R}^2_1$ razlikujemo tri vrste vektora. Za vektor $X = (x_1, x_2)$ kažemo da je

1. prostorni ako je $X \cdot X > 0$;
2. vremenski ako je $X \cdot X < 0$;
3. svjetlosni ako je $X \cdot X = 0$.

Posebno, među vremenskim i svjetlosnim vektorima razlikujemo dvije klase vektora: pozitivne i negativne vektore kao vektore koji još zadovoljavaju $x_1 > 0$, odnosno $x_1 < 0$.

Imena tih vektora potječu upravo iz četverodimenzionalnog prostora Minkowskog i teorije relativnosti o čemu će biti riječi kasnije.

Analizirajmo kakav skup određuju koordinate svjetlosnih vektora $X = (x_1, x_2)$ u x_1x_2-ravnini? Za njih vrijedi

$$-x_1^2 + x_2^2 = (-x_1 + x_2)(x_1 + x_2) = 0,$$

što povlači $-x_1 + x_2 = 0$ ili $x_1 + x_2 = 0$. Prema tome, koordinate svjetlosnih vektora zadovoljavaju $x_2 = x_1$ ili $x_2 = -x_1$, a to su pravci u x_1x_2-ravnini s koeficijentom smjera 1, odnosno -1.

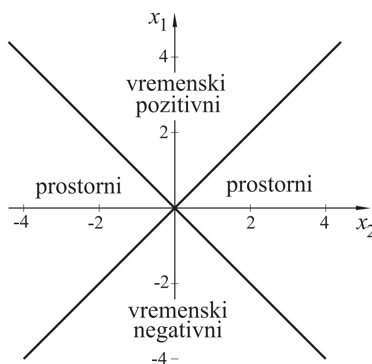
Za prostorne vektore vrijedi

$$-x_1^2 + x_2^2 > 0 \Leftrightarrow |x_2| > |x_1|,$$

a za vremenske vektore

$$-x_1^2 + x_2^2 < 0 \Leftrightarrow |x_2| < |x_1|.$$

Svjetlosni pravci i područja prostornih odnosno vremenskih vektora prikazana su na slici 1. Vremenski i svjetlosni pozitivni (negativni) vektori su u gornjoj (donjoj) poluravnini. Uočite položaje osi!



Slika 1. Svjetlosni, prostorni i vremenski vektori.

Kolika je duljina vektora $X \in \mathbf{R}^2_1$? Definiramo

$$|X| = \sqrt{(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)} = \sqrt{-x_1^2 + x_2^2},$$

što može biti pozitivan realan broj, pozitivan imaginaran broj (tj. broj oblika ia, $a > 0$, $i = \sqrt{-1}$ kompleksna jedinica) ili 0. Prostorni vektori su vektori pozitivne duljine, svjetlosni vektori su vektori duljine 0 (iako sami nisu nul-vektori!), a vremenski vektori su vektori pozitivne imaginarne duljine. Udaljenost (metriku) između X, Y definiramo kao i u euklidskom prostoru, $d(X, Y) = |X - Y|$. Očito udaljenost može biti pozitivan realan broj, pozitivan imaginaran broj ili 0.

Nakon što smo definirali mjerenje udaljenosti u prostoru Minkowskog, definirajmo kako mjeriti kutove.

Kao i u euklidskom prostoru, za vektore X, Y iz $\mathbf{R}_1^2$ kažemo da su okomiti (ortogonalni) ako je

$$X \cdot Y = 0.$$

Geometrija Minkowskog, kao i euklidska geometrija, ima svojstvo da je jedini vektor koji je okomit na sve vektore nul-vektor. To svojstvo nazivamo *nedegeneriranost skalarnog produkta*.

Iz uvjeta okomitosti vektora slijedi, primjerice, uvjet okomitosti pravaca u geometriji Minkowskog: ako su $y = k_i x + l_i$, $i = 1, 2$, okomiti pravci, tada njihovi vektori smjera zadovoljavaju $(k_1, -1) \cdot (k_2, -1) = -k_1 k_2 + 1 = 0$. Dakle, pravci su okomiti ako i samo ako su im koeficijenti smjera recipročni.

Nadalje, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka su vektori X, $Y \in \mathbf{R}_1^2$ okomiti. Ako je X vremenski vektor, tada je Y prostorni vektor (i obrnuto). Zaista, ako je $X = (x_1, x_2)$ vremenski vektor, tada je $X^2 < 0$, te je $x_2^2 < x_1^2$. Nadalje, kako su X, Y okomiti, to je $-x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$, stoga je (uz pretpostavku da je, primjerice, $x_1 \neq 0$)

$$y_1 = \frac{x_2 y_2}{x_1}.$$

Prema tome

$$Y^2 = -y_1^2 + y_2^2 = -\left(\frac{x_2 y_2}{x_1}\right)^2 + y_2^2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} y_2^2 > 0,$$

te je Y prostorni vektor. Slično, ako su X, Y okomiti i ako je, primjerice, vektor X svjetlosni, tada je X nul-vektor ili je Y također svjetlosni.

Uočimo nadalje da za sve vektore X, Y u prostoru Minkowskog $\mathbf{R}_1^2$ vrijedi

$$(X \cdot Y)^2 \geq |X|^2 |Y|^2. \tag{1}$$

Zaista,

$$\begin{aligned} |X|^2|Y|^2 &= (-x_1^2 + x_2^2)(-y_1^2 + y_2^2) = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 - x_1^2 y_2^2 \\ &= (X \cdot Y)^2 - (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 \leq (X \cdot Y)^2. \end{aligned}$$

Ta relacija nam omogućuje definirati kut između vektora u sljedećim situacijama. Ako su X, Y prostorni vektori, tada je umnožak $|X||Y|$ pozitivan, pa relacija (1) glasi $|X \cdot Y| \geq |X||Y|$. Možemo primijetiti da za zadane vektore X, Y postoji jedinstven nenegativan realni broj $\varphi(X, Y)$ tako da prethodnu relaciju zapisujemo kao

$$|X \cdot Y| = |X||Y| \operatorname{ch} \varphi(X, Y). \tag{2}$$

U izrazu (2) javila se elementarna funkcija *kosinus hiperbolički*. To je funkcija definirana za sve $\varphi \in \mathbf{R}$ sa

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$$

i za nju vrijedi $\operatorname{ch} \varphi \geq 1$. Nenegativan realan broj $\varphi(X, Y)$ iz izraza (2) nazivamo *kutom* između prostornih vektora X, Y.

Kut definiramo i za vremenske pozitivne (negativne) vektore X, Y. Za njih vrijedi

$$|X||Y| = ia \cdot ib = -ab < 0, \quad a, b > 0. \tag{3}$$

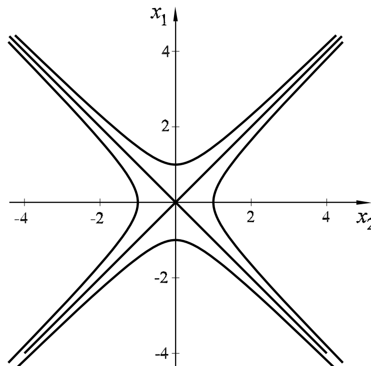
Također
$$|X||Y| < 0 \tag{4}$$
jer iz $X^2 = -x_1^2 + x_2^2 < 0$, $Y^2 = -y_1^2 + y_2^2 < 0$ slijedi (uz pretpostavku da su oba vektora, primjerice, pozitivna, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$)
$$-x_1 < x_2 < x_1, \quad -y_1 < y_2 < y_1.$$
Tada je $x_2y_2 < x_1y_1$, pa je $X \cdot Y = -x_1y_1 + x_2y_2 < -x_1y_1 + x_1y_1 = 0$. Kako su brojevi $X \cdot Y$ i $|X||Y|$ negativni, iz (1), (3) i (4) dobivamo
$$X \cdot Y \leq |X||Y| < 0.$$
Kao i prije zaključujemo da postoji jedinstven nenegativan realni broj $\varphi(X,Y)$ tako da vrijedi (2). Realan broj $\varphi(X,Y)$ definiran s (2) nazivamo *kutom* između vremenskih pozitivnih (negativnih) vektora X, Y.

Primijetimo da u euklidskoj geometriji vrijedi $X \cdot Y = |X||Y|\cos\varphi$, odakle slijedi $|X \cdot Y| \leq |X||Y|$.

Sjetimo se jednadžbe kružnice sa središtem u ishodištu O polumjera $R > 0$ u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^2$. Ona glasi $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, te kružnicu možemo definirati kao
$$\{X \in \mathbf{R}^2 : |X|^2 = R^2\}. \tag{5}$$

U prostoru Minkowskog $\mathbf{R}_1^2$ definiramo kružnicu sa središtem u ishodištu polumjera R također koristeći (5). Jednadžba te kružnice glasi $-x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

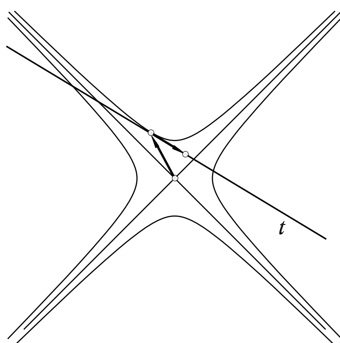
Kako izgleda kružnica u prostoru Minkowskog? Promatrano "euklidskim očima", to je zapravo jednakostrana hiperbola. Uočavamo da polumjer R kružnice u prostoru Minkowskog može biti pozitivan broj, pozitivan imaginaran broj ili 0. Kružnica polumjera 0 je upravo par pravaca koji određuje svjetlosne vektore. Jedinična kružnica pozitivnog polumjera ima jednadžbu
$$-x_1^2 + x_2^2 = 1,$$
a jedinična kružnica imaginarnog polumjera
$$-x_1^2 + x_2^2 = -1.$$
Te jedinične kružnice, kao i kružnica polumjera 0 prikazani su na slici 2. Kružnica pozitivnog realnog polumjera je hiperbola s tjemenima na x_2-osi, a kružnica imaginarnog polumjera je hiperbola s tjemenima na x_1-osi.



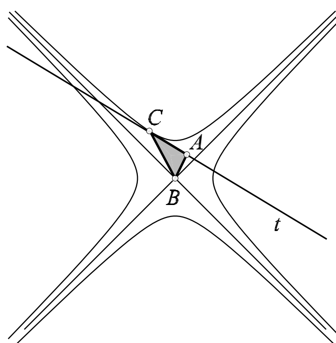
Slika 2. Kružnice pozitivnog, imaginarnog i polumjera 0.

Ako krivulju kojoj su svi tangencijalni vektori prostorni (vremenski) zovemo prostornom (vremenskom), tada je očito kružnica pozitivnog realnog polumjera vremenska krivulja, a kružnica imaginarnog polumjera prostorna krivulja.

Okomitost dvaju vektora sada možemo opravdati i geometrijski. Analogno kao i u euklidskom prostoru, i u prostoru Minkowskog je vektor polumjera kružnice (određen središtem kružnice i točkom kružnice) okomit na vektor smjera tangente na kružnicu u promatranoj točki (slika 3). Zaista, vektor polumjera ima smjer radij-vektora promatrane točke na kružnici, primjerice $(x_0, \sqrt{x_0^2 - 1})$, a vektor smjera tangente je određen derivacijom, pa je jednak $\left(1, \frac{1}{\sqrt{x_0^2-1}} x_0\right)$. Očito je Lorentzov skalarni produkt tih vektora jednak 0.



Slika 3. Okomiti vektori.



Slika 4. Pravokutan trokut.

Uočimo da ne možemo govoriti o mjeri kuta okomitih vektora (kao u euklidskom prostoru, gdje okomiti vektori zatvaraju kut od $\pi/2$), jer su okomiti vektori vektori različitih vrsta, te za njih kut nije definiran!

Pogledajmo kako glasi *Pitagorin teorem za pravokutan trokut* u geometriji Minkowskog (slika 4). Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut, pri čemu su stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ okomite (one su katete), a stranica $\overline{AB}$ je hipotenuza. Označimo s $a = ||BC|| > 0$, $b = ||CA|| > 0$, $c = ||AB|| > 0$ apsolutne vrijednosti njihovih duljina. Okomiti vektori su vektori različitih vrsta. Primjerice, ako je vektor $\overrightarrow{BC}$ vremenski, tada je $\overrightarrow{CA}$ prostorni. Hipotenuza $\overrightarrow{AB}$ je ponovo vremenski vektor. Računajući skalarni kvadrat od $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, uvažavajući da je $b^2 = -\overrightarrow{CA}^2$, dobivamo Pitagorin teorem u geometriji Minkowskog

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

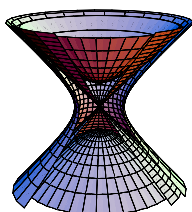
Sve prethodno možemo poopćiti i na trodimenzionalni prostor. Trodimenzionalni prostor Minkowskog $\mathbf{R}_1^3$ je realni vektorski prostor $\mathbf{R}^3$ s Lorentzovim skalarnim produktom

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Svjetlosni konus je konus (stožasta ploha) definiran jednadžbom

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2.$$

Prostorni vektori, vektori pozitivne duljine, nalaze se izvan svjetlosnog konusa, a vremenski vektori, vektori imaginarne duljine, unutar svjetlosnog konusa.



Slika 5. Svjetlosni konus i jedinične sfere.

U trodimenzionalnom vektorskom prostoru Minkowskog definiramo jedinične sfere: jedinična sfera pozitivnog polumjera

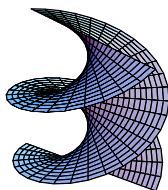
$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad (6)$$

je jednoplošni hiperboloid, a jedinična sfera pozitivnog imaginarnog polumjera

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \qquad (7)$$

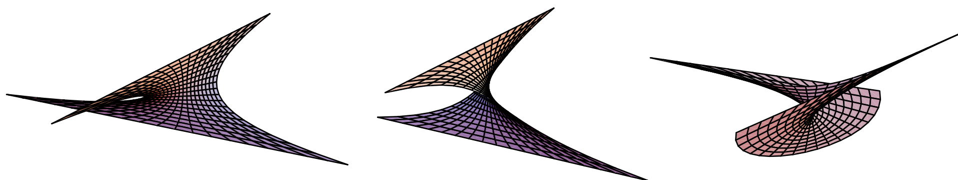
je dvoplošni hiperboloid (slika 5). Jedinična sfera pozitivnog polumjera je vremenska ploha, dok je jedinična sfera pozitivnog imaginarnog polumjera prostorna ploha. To su obje plohe konstantne zakrivljenosti, i to prva konstantne pozitivne, a druga konstantne negativne zakrivljenosti.

Osim tih ploha, u trodimenzionalnom prostoru Minkowskog zanimljivo je proučavati analogone euklidskih ploha. Postojanje triju vrsta vektora u prostoru Minkowskog često uzrokuje razlike u odnosu na euklidsku geometriju. Primjerice, u euklidskom prostoru je helikoid (osim ravnine) jedina pravčasta minimalna ploha (slika 6).



Slika 6. Helikoid, jedina pravčasta minimalna vitopera ploha u euklidskom prostoru.

Pravčaste plohe su plohe koje su generirane familijom pravaca duž neke krivulje. Minimalne plohe su plohe kojima je srednja zakrivljenost jednaka 0. Geometrija prostora Minkowskog u tom je smislu bogatija, postoje četiri pravčaste minimalne vitopere plohe. Pored helikoida, to su plohe prikazane na slici 7.

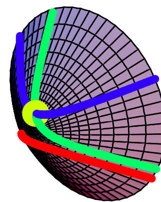


Slika 7. Pravčaste minimalne vitopere plohe u prostoru Minkowskog.

U (trodimenzionalnom) prostoru Minkowskog moguće je realizirati još jednu vrlo važnu geometriju, tzv. hiperboličku (dvodimenzionalnu) geometriju. Hiperbolička geometrija je značajna po tome što su u njoj zadovoljeni svi aksiomi euklidske (dvodimenzionalne) geometrije, osim aksioma o paralelama. U euklidskoj geometriji taj aksiom kaže: *Kroz danu točku, paralelno sa zadanim pravcem, moguće je povući točno jedan pravac*. Navedeni aksiom euklidske geometrije ima vrlo važno povijesno značenje – zbog svoje neobične duljine smatralo se da je možda već on posljedica ostalih aksioma. Taj je problem bio neriješen skoro 2000 godina i tek je u 19. stoljeću dokazano da je on zaista aksiom karakterističan za euklidsku geometriju, a njegovim negiranjem dobivamo nove geometrije, tzv. neeuklidske geometrije. Jedna od tih geometrija je i hiperbolička

geometrija. Za hiperboličku geometriju on glasi: *Kroz danu točku, paralelno sa zadanim pravcem, moguće je povući barem dva pravca.*

Model hiperboličke geometrije nalazimo na, primjerice, gornjoj plohi dvoplošnog hiperboloida (7), dakle, jedinične sfere imaginarnog polumjera u prostoru Minkowskog. Dvoplošni hiperboloid (7) je prostorna ploha konstantne negativne zakrivljenosti (jednake -1). Hiperbolička geometrija određena je ovako: njene točke su točke gornje grane dvoplošnog hiperboloida, a pravci su krivulje na dvoplošnom hiperboloidu koje se dobivaju kao presjeci dvoplošnog hiperboloida s ravninama kroz ishodište koordinatnog sustava. Te krivulje su hiperbole. Zaista, ovdje da se kroz danu točku paralelno sa zadanim pravcem (hiperbolom) mogu povući barem dva pravca (hiperbole), vidi sliku 8. Paralelni pravci su pravci koji se ne sijeku.



Slika 8. Pravac i dva s njim paralelna pravca kroz zadanu točku.

Geometrija Minkowskog je značajna i za fiziku. Četverodimenzionalni prostor Minkowskog je prostor Einsteinove teorije relativnosti. Naziva se *prostor-vrijeme* i osim tri prostorne koordinate x_1, x_2, x_3, ima i vremensku koordinatu koja ravnopravno sudjeluje u metrici prostora. U zapisu metrike koji smo mi koristili, to je prva koordinata ($x_1 = ct$, c je brzina svjetlosti)

$$|X|^2 = -c^2t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Kao i prije, svjetlosni konus se sastoji od vektora za koje je

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2t^2. \tag{8}$$

Vektori izvan konusa su prostorni vektori, a vektori unutar njega su vremenski, među kojima razlikujemo vektore budućnosti (vremenski pozitivni vektori, $t > 0$) i vektore prošlosti (vremenski negativni vektori, $t < 0$). Čestica se može gibati unutar svjetlosnog konusa, iz koordinate s vremenom $t < 0$ u koordinatu s vremenom $t > 0$. Po plaštu stošca mogu se gibati samo fotoni koji se gibaju brzinom svjetlosti.

Jednadžbu (8) možemo shvatiti kao sferu (u trodimenzionalnom euklidskom prostoru s koordinatama x_1, x_2, x_3) sa središtem u ishodištu O polumjera ct. Njome je opisana valna fronta svjetlosti koja se širi iz točkastog izvora u O.

Neka je $\{O'; t', x_1', x_2', x_3'\}$ drugi sustav koji se giba konstantnom brzinom u odnosu na sustav $\{O; t, x_1, x_2, x_3\}$. Pretpostavljamo da je brzina svjetlosti c u oba sustava ista. Ukoliko želimo da je sfera valne fronte u oba sustava dana istom jednadžbom, dobivamo tzv. *Lorentzove transformacije* za koordinate sustava. Pokazuje se da su Maxwellove jednadžbe za elektromagnetsko polje invarijantne na Lorentzove transformacije. One nisu bile invarijantne na tzv. *Galilejeve transformacije*, koje su transformacije Newtonove klasične mehanike. To je bila i motivacija za traženje novog konteksta za opis fizikalnih pojava. Kako su Lorentzove transformacije upravo transformacije koje čuvaju Lorentzovov skalarni produkt, geometrija Minkowskog je prirodni ambijent za teoriju relativnosti. Uz Lorentzove transformacije usko su vezani i pojmovi iz teorije relativnosti kao kontrakcija dužina, dilatacija vremena, kauzalnost, istodobnost i neistodobnost događaja.

Literatura

[1] W. KÜHNEL, *Differential Geometry, Curves – Surfaces – Manifolds*, American Mathematical Society, 2002.

[2] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

Nejednakost Popoviciua i njene primjene

Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina

Ovdje ćemo opisati interesantnu nejednakost Tiberiua Popoviciua, poznatog rumunjskog matematičara rođenog 1906. godine, koju je objavio 1965. godine, a koja glasi:

Ako je funkcija $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ konveksna, tada za sve brojeve $x, y, z \in [a,b]$ vrijedi nejednakost

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right)\right]. \tag{1}$$

Ako je funkcija f konkavna, tada u (1) vrijedi suprotna nejednakost, tj.

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \leq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right)\right]. \tag{2}$$

Dokaz ove nejednakosti može se naći, npr. u [7].

Dokaz. Ne smanjujući općenitost, možemo pretpostaviti da je $x \leq y \leq z$. Ako je $y \leq \frac{x+y+z}{3}$, onda je $\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{x+z}{2} \leq z$ i $\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{y+z}{2}$. Prema tome, postoje $s, t \in [0,1]$ tako da je

$$\frac{x+z}{2} = \frac{x+y+z}{3} \cdot s + (1-s) \cdot z, \tag{1'}$$

$$\frac{y+z}{2} = \frac{x+y+z}{3} \cdot t + (1-t) \cdot z. \tag{1''}$$

Zbrajajući jednakosti (1') i (1''), dobivamo

$$\frac{x+y-2z}{2} = (s+t) \cdot \frac{x+y-2z}{3},$$

a odavde $s+t = \frac{3}{2}$.

Kako je funkcija f konveksna, imamo

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) \leq s \cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-s)f(z),$$

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) \leq t \cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-t)f(z),$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Zbrajanjem ovih triju nejednakosti dobiva se nejednakost (1), što je i trebalo dokazati.

Slučaj $\frac{x+y+z}{3} < y$ promatra se na sličan način, pričem imamo $x \leq \frac{x+z}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}$ i $x \leq \frac{y+z}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}$.

Napomena 1. Ako je funkcija $f:[a,b]\longrightarrow \mathbf{R}$ konkavna, u (1) vrijedi suprotna nejednakost koja se dokazuje analogno.

Sada ćemo dati nekoliko primjena ove nejednakosti koje su u vezi s trokutom, a novodobivene nejednakosti će biti i poboljšanja nekih nejednakosti iz [3].

Nejednakost 1. Dokazati da za svaki trokut ABC vrijedi nejednakaost

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\geq \frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{s}{2R}, \tag{3}$$

gdje su α, β, γ njegovi unutarnji kutovi, s poluopseg i R polumjer opisane mu kružnice.

Dokaz. Promatrajmo funkciju $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$. Imamo $f'(x)=\cos x$, te $f''(x)=-\sin x\leqslant 0$, $\forall x\in[0,\pi]$, tj. funkcija je konkavna na intervalu $I=[0,\pi]$, pa iz (2) za $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ imamo

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\leq\frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

a odavde, zbog $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, tj.

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\ \text{ te}$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}:$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{3}\leq\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right),$$

odnosno, zbog

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R},$$

vrijedi nejednakost (3). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, tj. ako je trokut jednakostraničan.

Napomena 2. Nejednakost (3) je bolja od nejednakosti 2.27 u [3] koja ima oblik

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}>2.$$

Nejednakost 2. Dokazati da za svaki trokut s kutovima α, β, γ vrijedi nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\geq\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}, \tag{4}$$

gdje su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice tom trokutu.

Dokaz. U ovom slučaju ćemo promatrati funkciju $f(x)=\cos x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Kako je $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x\leq 0$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, tj. funkcija je konkavna na

intervalu $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, iz (2) za $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ imamo

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\leq\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

a odavde radi $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, tj.

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\ \text{ te}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}:$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\leq\frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right),$$

odnosno zbog

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R},$$

vrijedi nejednakost (4). Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Napomena 3. Nejednakost (4) je bolja od ove u 2.9 u [3]

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}>1.$$

Nejednakost 3. Za svaki šiljastokutan trokut s kutovima α, β, γ vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{2s}{r}-3\sqrt{3}. \tag{5}$$

Dokaz. Ovaj puta ćemo promatrati funkciju $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Kako je $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, te $f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, funkcija f je konveksna na intervalu $I=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pa iz (1), za $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3}\geq\frac{2}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}+\right),$$

a odavde radi $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, tj.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},\ \text{te}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{r}:$$

$$\sqrt{3}+\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3}\geq\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{r},$$

odnosno, vrijedi nejednakost (5).

Napomena 4. Kako je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, iz (5) dobijemo nejednakost

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \geq \frac{2s}{r}-3\sqrt{3}. \tag{6}$$

Napomena 5. Nejednakosti (5) i (6) su bolje nego ove u 2.30 i 2.32 u [3]

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3}, \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3},$$

jer je $\dfrac{2s}{r}-3\sqrt{3}\geq 3\sqrt{3} \Longleftrightarrow s\geq 3\sqrt{3}r$, a ovo je nejednakost u 5.11 u [3]. Jednakost u (5) ili (6) vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Nejednakost 4. Dokazati da za svaki trokut s kutovima α, β, γ vrijedi nejednakost

$$|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| \leq \frac{r^2}{2R^2}. \tag{7}$$

Dokaz. Uzmimo funkciju $f(x)=\ln|\cos x|$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Kako je

1° $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $f(x)=\ln\cos x$, $f'(x)=-\operatorname{tg}x$, $f''(x)=-\dfrac{1}{\cos^2 x}<0$, te

2° $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$: $f(x)=\ln(-\cos x)$, $f'(x)=-\operatorname{tg}x$, $f''(x)=-\dfrac{1}{\cos^2 x}<0$,

dana funkcija je konkavna za $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, pa iz (2) za $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\ln|\cos\alpha|+\ln|\cos\beta|+\ln|\cos\gamma|}{3}\\
&\quad\leq\frac{2}{3}\left(\ln\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\ln\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}+\ln\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\right)\\
&\Longleftrightarrow\quad -3\ln 2+\ln|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|\leq 2\ln\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right).
\end{aligned}$$

Odavde zbog $\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{r}{4R}$ imamo

$$-3\ln 2+\ln|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|\leq 2\ln\frac{r}{4R}, \quad \text{tj.}$$

$$\ln|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|\leq\ln\left(\frac{r^2}{16R^2}\cdot 8\right)$$

odnosno, vrijedi nejednakost (7).

Napomena 6. Ako je trokut tupokutan, tada je $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma<0$. Ako je trokut šiljastokutan, onda je $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\geq 0$. Dakle, u slučaju šiljastokutnog trokuta iz (7) dobivamo

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leq\frac{r^2}{2R^2}.$$

Ova nejednakost je bolja od nejednakosti 2.24 u [3], koja glasi

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leq\frac{1}{8},$$

jer je $\dfrac{r^2}{2R^2}\leq\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow R\geq 2r$, a ovo je poznata Eulerova nejednakost.

Jednakost u (7) vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Nejednakost 5. Dokazati da za svaki šiljastokutni trokut, čiji kutovi zadovoljavaju uvjete $\frac{\pi}{4} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$, vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geq \frac{\sqrt{3}s^2}{9r^2}. \tag{8}$$

Dokaz. Promatrajmo funkciju $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Kako je $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}$, $f''(x) = \frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x} > 0$, dana funkcija je konveksna na promatranom intervalu. Iz (1) dobivamo:

$$\begin{aligned} &\ln \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} + \frac{1}{3}(\ln \operatorname{tg}\alpha + \ln \operatorname{tg}\beta + \ln \operatorname{tg}\gamma) \\ &\geq \frac{2}{3}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \ln \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} + \ln \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \\ \iff \quad &\ln\sqrt{3} + \frac{1}{3}\ln(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma) \geq \frac{2}{3}\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right), \end{aligned}$$

odnosno

$$\ln\left[\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot (\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma)\right] \geq \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)^2,$$

a odavde

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Koristeći poznatu jednakost

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r}$$

dobivamo nejednakost (8). Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike,* Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] O. Bottema and others, *Geometric Inequalities,* Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] G. H. Eckstein, *O demonstraţie elementara a inegalităţii lui, Popoviciu,* Revista matematica din Timişoara, Vol. 2 (XXII), nr. 1 (1991), p. 7.

[5] D. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti,* Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[6] J. Pečarić, *Konveksne funkcije. Nejednakosti,* Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[7] T. Popoviciu, *Sur certaines inégalités qui caracterisent les fonctions convexes,* An. Sti. Univ. "Al. I. Cusa". Iassi Sect. I a Math. (N.S.) 11B(1965), 155–164.



Ponešto o sortiranju

Ante Ćustić[*], *Zadar*

Sortiranje nekog niza podataka čest je problem u računarstvu. Često se pojavljuje i unutar nekog većeg problema jer sortiranost podataka može olakšati njihovo daljnje korištenje. Zato se o sortiranju govori i u najosnovnijim kursevima o programiranju. Svi smo već čuli za Quicksort, Mergesort, Bubblesort itd. Iako smo puno slušali o njima vjerojatno bi nam trebalo dosta vremena da ih uspijemo iskodirati. Svi ti načini sortiranja su sortiranja uspoređivanjem. Znači, na skupu koji sortiramo imamo definiran totalni uređaj i nizom međusobnih uspoređivanja dvaju elemenata sortiramo niz. Donja granica složenosti sortiranja uspoređivanjem je $O(n\log n)$. Međutim, rijetko kada se spomene da se osim uspoređivanjem, sortiranje može ostvariti i na druge načine te da tako možemo dobiti složenost i bolju od $O(n\log n)$. U ovom članku ću izložititi neka razmišljanja o tim načinima sortiranja.

Počnimo s jednom vrlo jednostavnom, ali moćnom metodom. Pretpostavimo da želimo sortirati niz od n cijelih brojeva čije vrijednosti mogu biti od 0 do k. Sada ćemo za svaki broj od 0 do k prebrojati koliko se puta pojavljuje u našem nizu. Uzmimo polje (nazovimo ga *brojac*) od $k+1$ elemenata čije elemente inicijaliziramo s 0. Sada za svaki naš broj m iz niza povećamo *brojac*[m] za jedan. Na taj način ćemo postići da je na kraju *brojac*[i] jednak broju brojeva iz našeg niza čija je vrijednost i. Sada da bismo dobili sortiran niz potrebno je još samo proći kroz polje *brojac*, od početka do kraja, i slagati brojeve u početno polje jedan iza drugog tako da broj i stavimo *brojac*[i] puta. Da bude jasnije, slijedi primjer takvog programa u C-u:

```
#define N ...                              //broj elemenata niza kojeg želimo sortirati
#define K ...                              //brojevi od 0 do K-1

unsigned long int brojevi[N];              //niz koji želimo sortirati
unsigned long int brojac[K]={0}, i, j, pozicija=0;
for (i=0; i<N; i++) brojac[brojevi[i]]++;
for (i=0; i<K; i++)
   for (j=1; j<=brojac[i]; j++)
      brojevi[pozicija++]=i;
```

Koje su prednosti, a koje mane ovakvog sortiranja? Velika prednost je brzina. Lako se vidi da je složenost ovog sortiranja $O(n+k)$, gdje su n i k konstante iz teksta iznad. Dakle, imamo linearno sortiranje. I zaista, ovakvo sortiranje za veći broj elemenata niza radi daleko brže od bilo kojeg sortiranja uspoređivanjem. Nezanemariva prednost ovog sortiranja je i jednostavnost i kratkoća koda.

---

[*] Student je 4. godine studija matematike na PMF-u u Zagrebu.

Mana ovog načina skriva se u pomoćnom polju *brojac*. Naime, to polje mora imati onoliko elemenata koliko različitih vrijednosti mogu poprimiti elementi koje sortiramo. Na primjer, ako želimo sortirati prirodne brojeve koji mogu imati do 10 znamenaka, tada moramo imati polje od 10 milijardi elemenata, što današnja osobna računala ne dopuštaju. Razvojem računala, odnosno povećavanjem njihove memorije, povećava se i mogućnost primjene ovakvog načina sortiranja.

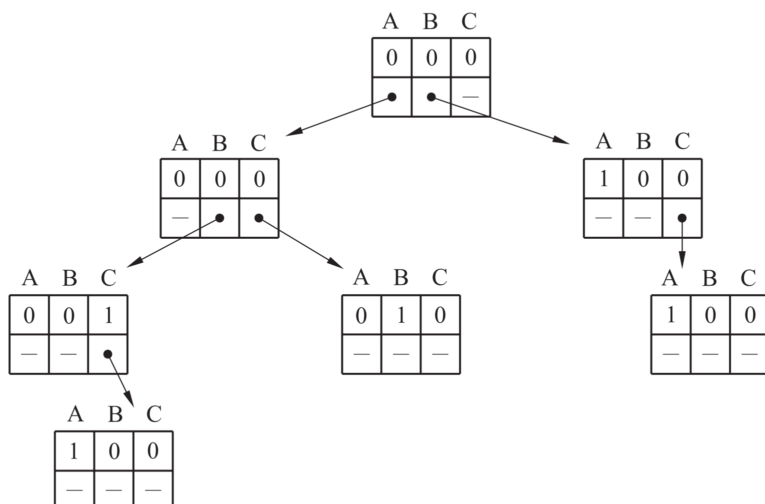
Mogu li se na ovaj način sortirati i drugi tipovi podataka? Nije baš jasno kako bi konstruirali naše pomoćno polje kad bi morali sortirati negativne brojeve, stringove, realne brojeve itd. No, na ovaj način moguće je sortirati elemente svih skupova X za koje postoji monotona bijekcija $f : X \to \{0, 1, ..., k-1\}$, gdje je k prirodan broj takav da je moguće konstruirati pomoćno polje od k elemenata. Tada ćemo za x iz X u *brojac*[f(x)] spremiti broj pojavljivanja od x u nizu kojeg želimo sortirati. Na primjer, ako želimo sortirati cijele bojeve između $-100\,000$ i $100\,000$, tada u *brojac*[0] izračunamo broj pojavljivanja $-100\,000$, u *brojac*[1] broj pojavljivanja $-99\,999$, i tako dalje. Tada je $f(x) = x + 100\,000$, a $k = 200\,001$. I zatim inverznom funkcijom popunimo početni niz koji tako postane sortiran.

Probajmo sortirati stringove. Možemo sortirati stringove npr. duljine 5 sastavljene od malih slova engleske abecede tako da f definiramo ovako: `f(str)=str[4]-'a'+(str[3] -'a')*26+(str[2]-'a')*26^2+(str[1]-'a')*26^3 +(str[0]-'a')*26^4`, pa je $k = 26^5$, što je dovoljno mali broj za konstrukciju pomoćnog polja. Tada *brojac*[0] odgovara stringu "aaaaa", brojac[1] stringu "aaaab" i tako dalje. No, ako želimo sortirati stringove različitih duljina koji mogu biti i dulji od 5, na primjer prezimena, tada to nećemo moći napraviti jer već različitih stringova duljine 6 ima previše za naše pomoćno polje.

Čini se da realne brojeve nećemo moći sortirati. Naime, koliko god mali interval uzeli on će i dalje biti neprebrojivo beskonačan. Međutim, to nije baš tako jer u računarstvu je sve konačno. Na primjer, ako tip float u C-u ima veličinu 32 bit-a, jasno je da on može prikazati najviše 2^{32} različitih brojeva. Jako neprecizno govoreći, realni brojevi se u računalu prikazuju u obliku $\pm s \cdot 10^e$, gdje je s decimalni broj iz intervala $[0.1, 1\rangle$ s preciznošću na d decimala, a e je cijeli broj čija vrijednost može biti od $-ex$ do $+ex$, gdje su d i ex konstante ovisne o tipu realnih brojeva (float, double...). Tada bi našu funkciju f mogli definirati tako da *brojac*[0] broji $-s \cdot 10^e$, gdje su s i e maksimalni. *brojac*-u dalje pridružujemo brojeve tako da se s smanjuje za $1/(10^d)$. Kad s dođe do 0.1, e se smanji za jedan, a s opet postane maksimalan. Kad e dođe do minimuma radimo analogno za pozitivne brojeve samo u obrnutom redoslijedu. Iako neprecizno opisano, ovim je dana ideja za pravo rješenje ovog problema. Ovakav f se moze izračunati "čačkanjem" po bitovima broja.

Znači, možemo sortirati i neke intervale realnih brojeva. Sada vidimo da se ovaj način može koristiti puno češće nego što se na početku činilo. Jedini problem nam je veličina pomoćnog polja i činjenica da elementi koje sortiramo moraju moći poprimiti samo ograničen broj različitih vrijednosti. Taj problem ćemo probati riješiti u daljnjim razmišljanjima.

Sada ćemo naše elemente sortiranja promatrati malo drugačije. Rastavljat ćemo ih na manje dijelove i onda sortirati po dijelovima stvarajući uređeno stablo. Pogledajmo to na primjeru stringova. Stvarat ćemo stablo čiji čvorovi će predstavljati jedan znak u stringu. Ubacivat ćemo stringove u naše stablo tako da će za svaki string postojati jedan posebno označen čvor za kojeg će se, putujući iz korijena do tog čvora i čitajući oznake čvorova kroz koje se prolazi, dobiti baš taj pripadni string. Pojasnimo to na jednom jednostavnom primjeru prikazanom na sljedećoj slici. U ovom primjeru, radi jednostavnoti slike, sortirat ćemo stringove koji mogu sadržavati samo znakove A, B i C. Ovo stablo nastalo je od stringova ABCD, BCA, ACB, ABC, BA.



Vidimo da se svaki čvor sastoji od tri stupca – svaki stupac za jedan mogući znak. Prvi red u stupcu označava broj stringova koje smo uronili u stablo koji završavaju na tom čvoru i točno tim znakom. Sada je putem od korijena do tog čvora jedinstveno određen taj string. Drugi red u stupcu sadrži pointer na podstablo u slučaju da postoji string koji se dobije dodavanjem još znakova na string koji je određen mjestom na kojem se nalazimo.

Uočimo da nam za ubacivanje novog stringa duljine l u stablo treba l koraka, od kojih će dio biti putovanje po već postojećim čvorovima, a kasnije ćemo eventualno dodavati nove čvorove. Po tome se vidi da će složenost stvaranja stabla od n stringova biti $O(n * k)$, gdje je k duljina najvećeg stringa. Uočimo da naše stablo može primati stringove proizvoljne duljine, na primjer dodavanje stringa duljine 100 ne bi predstavljao nikakav problem za naše stablo. Dakle, nemamo problem koji smo imali kod prošlog načina sortiranja. Sada, da bismo od ovakvog stabla dobili sortirani niz stringova sve što moramo napraviti je preorder obilazak stabla i to tako da na mjestima u čvorovima gdje nisu nule spremimo pripadni string odgovarajući broj puta. Preorder obilazak je obilazak gdje prvo posjetimo korijen, a zatim prvo dijete i po redu svu ostalu djecu. Preorder obilaskom prođemo svaki čvor točno jednom i ako pamtimo pripadni string čvora na kojem se nalazimo nećemo morati za svaki čvor prijeći put od korijena do njega da bismo znali pripadni string. Zato je složenost ovakvog preorder obilaska $O(m)$, gdje je m broj čvorova u stablu, što je sigurno manje od $O(n * k)$, pa je ukupna složenost ovog načina sortiranja $O(n * k)$. I zaista, na ovaj način možemo, za relativno velik broj elemenata, sortirati brže od Quicksorta, ali kod sortiranja još više elemenata gubi se efikasnost zbog velike alokacije memorije relativno velikih čvorova. Ipak ovaj način daje nam dobru teorijsku podlogu za daljnja razmišljanja.

Probajmo sada povezati vrline, a izbaciti mane dva opisana načina sortiranja. Opet ćemo naše elemente, kao u prošlom načinu, dijeliti na manje dijelove, i tada naš cijeli niz sortirati s obzirom na te dijelove nekoliko puta. Ta sortiranja radit ćemo metodom prvog opisanog sortiranja. Da bude jasnije objasnit ćemo to na jednom primjeru. Sortirat ćemo prirodne brojeve 149, 252, 478, 73, 672, 106. Naše brojeve ćemo sortirati rastavljanjem na znamenke. Prvo sortiramo s obzirom na znamenku najmanje važnosti, tj. znamenku jedinica, zatim desetica i na kraju stotica. Na kraju ćemo dobiti sortirani niz.

Ovako:

$25\underline{2}$	$1\underline{0}6$	$\underline{\ }73$
$67\underline{2}$	$1\underline{4}3$	$\underline{1}06$
$14\underline{3}$	$2\underline{5}2$	$\underline{1}43$
$7\underline{3}$	$6\underline{7}2$	$\underline{2}56$
$10\underline{6}$	$\underline{7}3$	$\underline{4}78$
$47\underline{8}$	$4\underline{7}8$	$\underline{6}72$

Primijetimo da za svako međusortiranje oni elementi koji imaju jednaku pripadnu znamenku po kojoj se sortira, moraju ostati u jednakom međusobnom poretku kao i prije tog sortiranja. To svojstvo je ključno! (Zašto?) Svako naše međusortiranje sortira puno brojeva po jednoj znamenci koja može poprimiti samo 10 različitih mogućnosti. Jasno je da nam za to savršeno odgovara metoda iz prvog opisanog sortiranja. Međusortiranje se ponavlja onoliko puta koliko najveći broj ima znamenaka. Naše elemente, u ovom slučaju prirodne brojeve, možemo dijeliti i na druge načine, npr. na bitove ili po dvije, tri ili više znamenaka.

Pogledajmo detaljnije kako bi izgledao jedan program za sortiranje prirodnih brojeva ovom metodom. Najprije prođemo kroz cijeli niz i u pomoćno polje *brojac* izračunamo koliko se puta koja znamenka pojavljuje. Tada ne možemo sortirati naš niz samo prolaskom po pomoćnom polju jer ne znamo kojem broju je pripadala ta znamenka. Za to ćemo imati još jedno pomoćno polje (nazovimo ga *pomak*) veličine iste kao i *brojac* koji u *pomak*[i] računa mjesto u nizu gdje treba biti spremljen sljedeći broj kojem je pripadna znamenka i. *pomak* popunimo sljedećom rekurzijom:

```
pomak[0]=0
pomak[i]=pomak[i-1]+brojac[i-1]
```

Sada prođemo po početnom nizu i svaki broj kojem je pripadna znamenka i, spremamo na mjesto *pomak*[i], i nakon toga povećamo *pomak*[i] za jedan. Spremati moramo u drugi niz. Kasnije će taj drugi niz biti sortiran, a onaj prvi će služiti za spremanje. Uloge ta dva niza će se ciklički mijenjati. Sada ponavljamo međusortiranja na tako nastalom nizu, ali na sljedećoj znamenci, sve dok ne bude i posljednja znamenka najvećeg broja obrađena. Evo jednog jednostavnog primjera u C-u koji koristi tu metodu. U ovom primjeru nećemo rastavljati na po jednu znamenku nego po tri.

```
#define N 10000000                  // broj elemenata niza kojeg sortiramo
#define VZ 1000                     // veličina 'znamenke', 1000 znaci da sortiramo po tri znamenke
unsigned long int polje[2][N];      // polje koje sortiramo i polje u koje spremamo, mjenjaju uloge
long int dj=1,i,broj,predjeni;      // pomoćne varijable
int prvi=0,drugi=1;                 // varijable koje određuju koje polje ima koju ulogu
long int brojac[VZ],pomak[VZ];

while (1){
  predjeni=0;                       // broji za koliko elemenata niza smo pregledali sve znamenke
   for (i=0; i<VZ; i++) brojac[i]=0;
  for (i=0; i<N; i++){
    broj=polje[prvi][i]/dj;
    brojac[broj%VZ]++;              // punimo polje 'brojac' (metoda prvog načina)
    if (broj==0) predjeni++;
  }
  if (predjeni==N) break;           // svim elementima presli sve znamenke, program se zaustavlja
  pomak[0]=0;
```

```
  for (i=1; i<VZ; i++) pomak[i]=pomak[i-1]+brojac[i-1]; //računanje pomaka
  for(i=0;i<N;i++)polje[drugi][pomak[(polje[prvi][i]/dj)%VZ]++]=polje[prvi][i];
                          //spremanje
  prvi=(prvi+1)%2;        //varijable se zamjenjuju, tj. polja mijenjaju ulogu
  drugi=(drugi+1)%2;
  dj*=VZ;                 //dj se množi sa VZ, tj. gledamo sljedeće (tri) znamenke
}
```

Ovaj kratak i jednostavan program, iako se može još optimizirati, vrlo je efikasan. Očito je da se ovako mogu sortirati i stringovi na analogan način. Inače, iako to nije očito niti jako poznato, na ovaj način mogu se sortirati i realni brojevi, iako malo kompliciranije. Ova metoda se može i modificirati ako je potrebno, tako da se prvo sortira od najvažnijeg dijela. Lako se vidi da je složenost ovog načina $O(n*k)$ gdje je k broj dijelova na koliko se mora rastaviti najveći element niza. Više o ovakvim načinima sortiranja potražite na internetu pod nazivom radix sort. Metoda je vrlo efikasna, probajte i usporedite je s nekim sortiranjem uspoređivanjem i vidjet ćete da radi bolje.



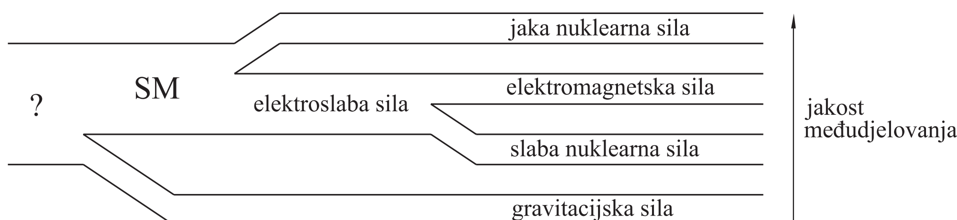
ASTRONOMIJA

Gravastar protiv crne rupe

Dubravko Horvat, Saša Ilijić, Zagreb

Uvod

Razumijevanje prirode, točnije procesa u njoj, primarni je zadatak grupe znanstvenih disciplina koju zovemo prirodne znanosti među kojima fizika zauzima eminentni položaj. Kroz različita podpodručja fizike istraživanja se usmjeravaju prema grupama zajedničkih pojava, a teorije, eksperimenti i rezultati tih istraživanja grupiraju se zatim u područja mehanike, optike, statističke fizike, fizike elementarnih čestica, astrofizike, nuklearne fizike, itd. Sve te podjele, međutim, predstavljaju samo prividne cjeline, a sva istraživanja, sve teorije i svi eksperimentalni rezultati u stvari su međusobno prožeti, i uvijek i svuda osjeća se jedinstvo fizikalnog istraživanja, jedinstvo fizikalnog pristupa i jedinstvo svih fizikalnih znanja koja nam omogućuju interpretaciju pojedinih teorija ili rezultata eksperimenata. Tu posebno valja naglasiti spoznaju da sva međudjelovanja (sile) u prirodi koja se izučavaju u pojedinim poddisciplinama fizike i drugih znanosti, možemo svesti na (samo) četiri osnovna međudjelovanja: elektromagnetsko, jako, slabo i gravitacijsko.



Slika 1. Ujedinjenje četiriju fundamentalnih sila u jedinstvenu teoriju? Standardni model fizike elementarnih čestica (SM) opisuje jaku nuklearnu, elektromagnetsku i slabu nuklearnu silu, ali ne i gravitacijsku. Teorija koja na jedinstveni način opisuje sve četiri sile do danas nije poznata.

Intenzivna istraživanja, posebno tijekom 20-og stoljeća, omogućila su stvaranje sveobuhvatne teorije koja u svom teorijsko-matematičkom i spoznajnom okviru ujedinjuje *tri* međudjelovanja – slabo, jako i elektromagnetsko – u tzv. *Standardni model* koji predstavlja kvantnomehaničku formulaciju i sintezu zakonitosti dinamike mikroskopskih procesa i njihovih makroskopskih posljedica. U Standardnom modelu usklađeni su fantastični rezultati teorijskih proračuna i eksperimentalnih rezultata, pa se nekako prirodno nametnula i želja da u okvir jedne takve teorije fizičari pokušaju uključiti i gravitacijsko međudjelovanje – jedino od fundamentalnih koje je ostalo izvan kvantnomehaničke formulacije Standardnog modela (slika 1). U ovom trenutku taj zadatak nije riješen i gravitaciju još proučavamo u okviru (klasične) opće teorije relativnosti (OTR), a Newtonova je teorija gravitacijskog polja izvedena iz opće teorije relativnosti kao njena prva približnost. Možemo dakle reći, da je u ovom trenutku Einsteinova opća teorija relativnosti teorija gravitacijskog međudjelovanja i da golemu količinu podataka, rezultata, opažanja u astrofizici i kozmologiji i teorijskih rezultata razumijevamo kroz proračune unutar te teorije, koja u sebi ujedinjuje vrlo zamršeni matematičko-geometrijski formalizam zakrivljenih (Riemannovih) prostora i gotovo sva područja fizike, od teorije elastičnosti i mehanike fluida do statističke fizike, elektromagnetizma, itd.

OTR, Schwarzschildovo rješenje i crne rupe

Jedna od najuzbudljivijih predikcija opće teorije relativnosti je postojanje područja prostor-vremena (dakle, našeg svakodnevnog, trodimenzionalnog prostora proširenog za vremensku koordinatu u četverodimenzionalni prostor-vrijeme) u kojem je gravitacija tako jaka da niti tvar niti svjetlost ne mogu napustiti to područje. Do te složene situacije koja nas ovdje posebno zanima dolazimo rješavajući tzv. Einsteinova jednadžba koja ima sasvim bezazlen i elegantan izgled

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

gdje se pojavljuju i poznate konstante klasične fizike, brzina svjetlosti c i gravitacijska konstanta G poznata iz Newtonovog zakona opće gravitacije. U gornjoj se jednadžbi u stvari radi o "prikrivanju istine", ili bar njenom uljepšavanju. Lijeva strana te naizgled vrlo jednostavne jednadžbe sadrži Einsteinov tenzor, $G_{\mu\nu}$. (Neke veličine u fizici poput energije ili temperature opisujemo samo jednim podatkom i zovemo ih skalarnim veličinama ili *skalarima*, dok nam za opis npr. brzine ili akceleracije trebaju tri podatka pa govorimo o *vektorima*. Složenije fizikalne veličine poput dielektrične konstante ili

naprezanja materijala opisujemo složenijim strukturama koje zovemo tenzori, a još složenije veličine, tenzori višeg reda.) Einsteinov tenzor sadrži vrlo zamršen nelinearni sklop derivacija koje opisuju zakrivljenost (Riemannovog) prostora, dok desna strana opisuje tvar koja dovodi do te zakrivljenosti. Sve to dovodi do velikog broja nelineranih diferencijalnih jednadžbi (njih 10) čije rješenje predstavlja glavni cilj opće teorije relativnosti. Iz takvog je zamršenog sustava jednadžbi moguće dobiti, kao što smo i ranije naglasili, naš poznati Newtonov zakon gravitacijskog privlačenja (svemirskih) masa. U općoj teoriji relativnosti, međutim, gravitacijska sila nije sila u smislu njutnovske fizike, već je ona manifestacija zakrivljenosti prostora. Popularni opis sadržaja gornje jednadžbe glasi ovako:

> *Tvar, dakle energija i masa (desna strana), kazuje prostor-vremenu kako se mora zakriviti, a zakrivljeno prostor-vrijeme (lijeva strana) kazuje tvari kako se mora gibati.*

Ubrzo nakon što je 1915. g. Einstein objavio svoju opću teoriju relativnosti, genijalni astronom Karl Schwarzschild pronašao je rješenje gornjih jednadžbi za jedan vrlo važan slučaj: za zvijezdu (odnosno nebesko tijelo) koja ima sferno simetrični (kuglasti) raspored mase M, koji odgovara npr. kuglastoj strukturi našeg Sunca. To rješenje sadrži matematički izraz oblika

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

u kojemu se uz masu zvijezde M javljaju ranije spomenute konstante. Pažljiviji pogled na taj izraz otkriva nam da se u njemu mogu javiti problemi, odnosno točnije rečeno – singulariteti. Singularna točka nekog matematičkog izraza je ona u kojoj ovaj poprima beskonačnu vrijednost. Pojava singulariteta unosi strah u kosti matematičarima, a na nju nisu imuni ni fizičari. Možda je početni izvor straha zapravo i došao od fizičara koji su shvatili da pojedina matematička rješenja fizikalnih situacija sadrže takve izraze koji ta rješenja pretvaraju u fizikalne besmislice, pa se dobivaju rezultati poput "beskonačnog vremena zaustavljanja", ili "beskonačne brzine vrtnje" i tome slično. Jedan od takvih sigulariteta javlja se i u gornjem Schwarzschildovom rješenju, jer vidimo da za $r = 0$ gornji izraz postaje beskonačan, tj. dovodi upravo do jedne od takvih fizikalnih besmislica. Osim toga, gornji izraz ulazi u Schwarzschildovo rješenje u nekim izrazima kao nazivnik, pa kada je $r = 2GM/c^2$, tada je i cijeli gornji izraz jednak nuli, a razlomak koji sadrži taj izraz kao nazivnik postaje beskonačan, te i ovdje sve postaje besmisleno. Taj neugodni r, za koji uvodimo posebnu oznaku R_S, zove se Schwarzschildov radijus. Prema tome, predivno Schwarzschildovo rješenje sadrži i neke (jako) neugodne stvari. Točno je da se dio problema može ukloniti tako da se napravi zamjena varijabli, ali neke probleme – singularitete – ipak nije moguće ukloniti.

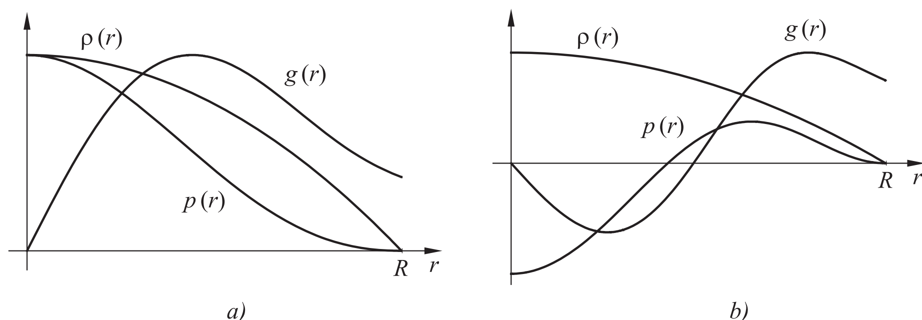
Problemi koje ovdje spominjemo blisko su vezani uz proračune čuvenog indijskog fizičara Subrahmanyana Chandrasekhara koji je došao do rezultata da svemirska tijela – zvijezde – čija je masa nešto veća od mase Sunca (manja od $1.4 \times M_\odot$, gdje oznaku $\odot$ astronomi rabe za Sunce, a npr. za Zemlju je oznaka $\oplus$) umiru tako da se, nakon što potroše svoje nuklearno gorivo (kojega naše Sunce za sada ima dovoljno), postepeno urušavaju i postanu tzv. *bijeli patuljci*. Od daljnjeg gravitacijskog sažimanja (kolapsa) sprječava ih kvantnomehanički princip (Paulijev princip) koji brani elektronima da se nađu u prostoru "jedan preko drugog". Za zvijezde s masom većom od $1.4 \times M_\odot$ ali manjom od oko $2 - 3\,M_\odot$, umiruća zvijezda postaje *neutronska zvijezda* koju, slično kao i u slučaju bijelog patuljka, isti kvantnomehanički princip spašava od totalnog kolapsa (jer su neutroni po kvantnomehaničkim svojstvima slični elektronima – i jedni i drugi su tzv. fermioni – koji se ne smiju u prostoru međusobno preklapati). Zvijezdu čija je masa veća od $3 \times M_\odot$ ništa ne može spasiti od potpunog kolapsa: ona, prije ili kasnije, nužno

postaje *crna rupa*. Radi se o trijumfu gravitacije koja cijelu masu zvijezde pretvori u singularitet, obriše je iz prostor-vremena, a oko nje stvori prividnu površinu – *horizont događaja* – polupropusnu membranu kroz koju ulazi sve – energija, tvar, svjetlost (često kažemo *informacija*) – ali iz koje nitko i ništa ne može izaći! Horizont događaja tako razdvaja svijet na naš fizikalno prihvatljivi uzročno-posljedični dio (izvan horizonta) i na dio u kojem se uzrok i posljedica miješaju, u kojem se miješa i zamjenjuje uloga prostora i vremena, a sve to nije u skladu niti s kvantnomehaničkim principima. Ta virtualna površina – horizont događaja, određena je svojim polumjerom koji je upravo jednak ranije spomenutom Schwarzschildovom polumjeru R_S, koji se dade izračunati i izraziti preko mase zvijezde M, tj. $R_S = 2GM/c^2 = 2GM_\odot M/(M_\odot c^2) = 2.95\,\text{km}(M/M_\odot)$, odakle odmah vidimo da bi zvijezda mase M jednake masi našeg Sunca imala horizont veličine 2.95 km.

Postoje li u prirodi doista crne rupe još je uvijek otvoreno pitanje, iako je sigurno da u Svemiru postoje dovoljno masivne zvijezde koje bi prema gornjem scenariju gravitacijskim kolapsom morale dovesti do njihova stvaranja. Ovdje je zanimljivo istaknuti da se razmišljanja o takvim masivnim tijelima gotovo suludog ponašanja mogu pronaći već i u dalekoj prošlosti, npr. još u Newtonovo doba, kad je engleski geolog John Michell (1783. g.) razmišljao o tako masivnom tijelu kojem bi se vraćala sva svjetlost koju bi ono emitiralo. Što se tiče samog naziva, kovanica "crna rupa" mnogo je mlađa od razmišljanja o takvim tijelima koja su ranije nazivana "smrznute zvijezde". Današnji naziv "crna rupa" smislio je još živući poznati fizičar "stare garde," John Archibald Wheeler (tek) 1967. g.

Gravastar – alternativa crnoj rupi

Iz svega gore opisanog očigledno je da romantičan naziv "crna rupa" u fizikalnom smislu unosi neke već ranije razmotrene "neugodnosti" (singularitet), a povrh toga postojanje horizonta događaja na $r = R_S$ dalje komplicira stvar, pa prirodno dolazimo na ideju da pokušamo pronaći rješenja unutar opće teorije relativnosti koja su fizikalna, bez opasnosti da uletimo u nešto što ne razumijemo ili čega u stvari niti nema. Singularitet nije dio prostor-vremena pa "pasti u singularitet" znači "pasti u ništa, nikad i nigdje", što je savršeno besmisleno! Osim toga, do danas se ne može reći, niti sa sigurnošću ustvrditi, da je pronađena ijedna crna rupa, već je uglavnom riječ o "ozbiljnim kandidatima" i sl. Razmišljajući u tom smjeru, dva fizičara iz Los Alamos National Laboratory (u Novom Meksiku, gdje je proizvedena prva (i druga, i treća ...) atomska bomba), E. Mottola i P. Mazur [1] (M-M) pronašli su rješenje koje je u skladu s postojećim kvantnomehaničkim principima. Njihovo rješenje nema problema sa singularitetom, ono postoji u cijelom prostor-vremenu, a u njemu nema ni horizonta koji unosi besmisleni redoslijed događaja i preplиće vrijeme i prostor. Model uključuje vakuumsku energiju i postojanje tamne energije (vidjeti članak od H. Štefančića, MFL broj 216), pa je prvo ime koje je takvo tijelo dobilo bilo "zvijezda tamne energije". Upravo zbog komponente tamne energije nije bilo jasno bi li takva tvorevina uopće bila stabilna ili bi se razletila zbog unutarnjih odbojnih sila, no ubrzo je izračunato da stabilnost nije upitna, a postepeno je prihvaćen i naziv *gravastar* (*gra*vitational *va*cuum *star*). Istraživanja su u tom smjeru nastavljena, prvobitni M-M model bitno je pojednostavljen i pronađeno je više rješenja [2,3] koja imaju prihvatljivo ponašanje za razliku od crnih rupa.



Slika 2. Kvalitativni prikaz ponašanja gustoće mase $\rho(r)$, tlaka $p(r)$, i ubrzanja gravitacijske sile $g(r)$, u unutrašnjosti nebeskog tijela uobičajene građe (a) i u gravastaru (b). Koordinata r je udaljenost od središta, a R označava polumjer tijela. Važno je uočiti promjenu predznaka akceleracije $g(r)$ u gravastaru.

Eksperti u istraživanju crnih rupa smatraju da je ideja gravastara kao alternative crnim rupama vrlo privlačna i da daljnja istraživanja u tom smjeru imaju smisla, prvenstveno u razmatranju svih onih svojstava proučavanih i kod crnih rupa: naboj, vrtnja itd.

Osim s crnom rupom, gravastar je zanimljivo usporediti i s nebeskim tijelom "obične" strukture poput npr. neutronske zvijezde, bijelog patuljka, ili zvijezde nalik našem Suncu. U unutrašnjosti "običnih" tijela privlačna gravitacijska sila nastoji sažeti materijal od kojeg je tijelo izgrađeno (slika 2a). Ubrzanje gravitacijske sile usmjereno je prema središtu tijela, ono iščezava u njegovu središtu, dok na površini tijela poprima konačnu vrijednost. Tlak unutar tijela opire se gravitacijskom sažimanju, a tijelo može izbjeći gravitacijski kolaps jedino ako je tlak dovoljno velik. Tlak poprima najveću vrijednost u središtu tijela, a iščezava na njegovoj površini. Kod gravastara dolazi do zanimljivog preokreta (slika 2b): kao i kod običnog tijela, tlak na njegovoj površini iščezava te je ubrzanje gravitacijske sile usmjereno prema njegovu središtu, dok u unutrašnjosti tlak poprima negativnu vrijednost, kao da i on nastoji pomoći u sažimanju tijela. Dakako, istovremeno dolazi do još jedne zanimljive pojave koju dopušta opća teorija relativnosti: uslijed negativnog tlaka gravitacijska sila mijenja ćud, ona postaje odbojna! Ovakav "neobičan" preokret unutar Newtonove teorije gravitacije nije bio moguć.

Istraživanja svemirskih objekata u okviru opće teorije relativnosti predstavljaju vrlo važan smjer modernog fizikalnog istraživanja, no potpuni cilj bio bi ostvaren tek kada bismo uspjeli razumjeti i mikroskopske aspekte, dakle, kvantnomehaničke mehanizme, čija dinamika sigurno daje okvir proračunima i na zvjezdanim udaljenostima. U ovom trenutku, fizikalnim istraživanjima nedostaje kvantnomehanički opis gravitacijskih pojava, pa je stoga izuzetno važno istražiti sve aspekte klasične opće teorije relativnosti, a zasigurno je vrlo zanimljivo i uzbudljivo ono područje u kojem nailazimo na gravitacijske vakuumske zvijezde, odnosno gravastare.

Literatura

[1] P. O. Mazur i E. Mottola, *Proceedings of the Sixth Workshop on Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions*, Oklahoma, Rinton Press, Princeton, N.J. (2003).

[2] N. Bilić, G. B. Tupper i R. D. Viollier, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 02 (2006) 013.

[3] A. DeBenedictis, D. Horvat, S. Ilijić, S. Kloster i K. S. Viswanatham, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 2303.

ZABAVNA MATEMATIKA

Broj 366

Na zadnjem satu matematike na kraju prošle godine Profesor Godinić i njegovi učenici proučavali su prikaze broja 365 pomoću dva ili tri kvadrata. U predblagdanskoj atmosferi i u vedrom raspoloženju našli su niz zanimljivih rješenja. Zato nije čudo da je prvi sat matematike u novoj godini profesor Godinić otvorio riječima:

— Znamo da je 2008. prijestupna godina, pa ima 366 dana. Danas ćemo ispitivati prikaze broja 366 pomoću kvadrata, točnije, pomoću zbrojeva ili razlika dvaju ili triju kvadrata prirodnih brojeva.

— Znači, nastavljaju se muke iz prošle godine! — čuo se tih glas otpozadi.

Ipak, svi su odmah prionuli na posao, jer su već imali zacrtan početak, saznanja o broju 365. Pridružite im se i vi.

Broj 2008

Dok su učenici u tišini rješavali prvi zadatak, profesor Godinić bio je namršten.

— Profa opet nešto smišlja — ponovo se javio isti glas. — Ne bi me čudilo da nam i broj 2008 ne uvali u izmučeni mozak!

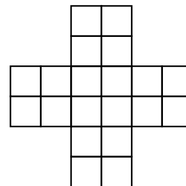
— Da, da. Malo ćemo se pozabaviti i s brojem 2008. Za malu promjenu, iste znamenke! U drugom zadatku trebate broj 2008 prikazati pomoću istih znamenki i bez uporabe zagrada. Tražite što jednostavnije prikaze — profesor Godinić ponovo je zračio vedrinom.

— Eh, što sam vam rekao! Ali bolje i to nego da ispituje. Sredimo i broj 2008!

Sredite ga i vi.

Grčki križ

Na crtežu vidite simetrični dvanaesterokut koji se naziva "grčki križ". Možemo ga promatrati i kao znak "plus". Lik je podijeljen na 20 jednakih kvadratića. Jednostavna je i njegova podjela na 5 jednakih kvadrata. Vaš je zadatak da lik podijelite na samo 4 sukladna mnogokuta.



Na koliko se to načina može učiniti?

Domjenak

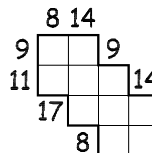
U kongresnoj dvorani na domjenku skupili su se svi sudionici velikog međunarodnog natjecanja mladih matematičara. Domjenak je počeo točno u 19 sati. Već nakon pola sata otišla je polovica sudionika, a potom je svakih pola sata odlazila polovica preostalih tako da je posljednji, domaćin, zaključao dvoranu i otišao točno u ponoć.



Pitanje glasi: koliko je gostiju bilo na početku domjenka?

Brojke i računi

Pred vama je lik s deset polja. U ta polja upišite sve brojke od 0 do 9, ali tako da je zbroj brojeva u svakom retku, odnosno stupcu upravo onaj koji je naveden na početku.



Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2008. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/ 233.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu stranice 208.[1]

A) Zadaci iz matematike

3091.* Dokaži da ako se među znamenkama broja 1331 napiše jednak broj nula, dobiva se potpuni kub.

3092.* Riješi sustav jednadžbi

$$x+y+xy=19,$$
$$y+z+yz=11,$$
$$z+x+zx=14.$$

3093. Ako su a, b i c pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

3094. Dani su međusobno različiti kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3, z_4, takvi da je $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$. Dokaži da je

$$\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_2-z_4}$$

pozitivan realan broj.

3095.* Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ međusobno okomiti promjeri kružnice. Tetiva $\overline{DF}$ siječe $\overline{AB}$ u točki E. Ako je $|DE|=6$ i $|EF|=2$, kolika je površina kruga?

3096.* Dana je točka D na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC, a u trokute ABD i ADC upisane su kružnice. Zajednička tangenta tih kružnica siječe dužinu $\overline{AD}$ u točki K. Dokaži da duljina dužine $\overline{AK}$ ne ovisi od položaja točke D.

3097. Duljine dijagonala Heronovog paralelograma (kojemu su duljine stranica i dijagonala cijeli brojevi) su 85 i 41. Odredi duljine njegovih stranica.

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

3098. Neka je P točka unutar trokuta ABC. Pravci AP, BP, CP sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u točkama L, M, N, tim redom. Dokaži da su sljedeća dva uvjeta ekvivalentna:

$$\frac{1}{|AP|}+\frac{1}{|PL|}=\frac{1}{|BP|}+\frac{1}{|PM|}=\frac{1}{|CP|}+\frac{1}{|PN|};$$

$$\sphericalangle APN=\sphericalangle NPB=\sphericalangle BPL$$
$$=\sphericalangle LPC=\sphericalangle CPM=\sphericalangle MPA=60^\circ.$$

3099. Nađi sve funkcije $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ za koje je

$$f(n^2)=f(n+m)f(n-m)+m^2$$

za sve $a,\ b\in\mathbf{Z}$.

3100. Neka su a,b,c,m,n,p realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=1$ i $m^2+n^2+c^2=1$. Dokaži da je

$$|am+bn+cp|\le 1.$$

3101. Za pozitivan cijeli broj n označimo

$$f(n)=\begin{cases}\log_8 n, & \text{ako je } \log_8 n \text{ racionalan}\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

Koliko je $\displaystyle\sum_{n=1}^{2008} f(n)$?

3102. Nađi sumu

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n,\qquad x\neq 1.$$

3103. Dokaži da je za svaki prirodan broj n, produkt

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)(2n),$$

djeljiv s 2^n.

3104. Koliko puta treba baciti dvije kocke, tako da vjerojatnost da se na obje kocke pojavi jednak broj, bude veća od $\frac{1}{2}$?

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 274. Vučnica u Vilinskim Dragama na Bjelolasici vuče Ivana prosječnom silom od 24 N. Faktor trenja između njegovih skija i snijega iznosi 0.03. Kolika je masa Ivanove opreme, ako je njegova masa 74 kg?

OŠ – 275. Na horizontalnoj podlozi su dvoja kolica povezana oprugom mase 100 grama i konstante elastičnosti 80 N/ m.

Na kolica djeluju sile u suprotnim smjerovima. Kad na prva kolica, kojima je masa 1 kg, djeluje sila od 7 N, opruga se produlji za 15 cm. Masa drugih kolica iznosi 900 grama. Kolika je sila koja djeluje na njih? Koliko je ubrzanje sustava ovih kolica?

OŠ – 276. Marsov satelit Phobos je najbliži matičnom planetu od svih prirodnih satelita Sunčevog sustava. On rotira oko Marsa na prosječnoj udaljenosti 5980 km. Za jedan obilazak treba 7 sati i 39 minuta. Prosječna udaljenost Mjeseca od Zemlje iznosi 384 000 kilometara, a jedan obilazak traje 27.3 dana. Koliko je Mjesečeva brzina rotacije veća od Phobosove? Srednji polumjer Marsa iznosi 3396 km, a Zemlje 6371 km. Pretpostavite da su staze ovih nebeskih tijela kružnice.

OŠ – 277. S krova zgrade visoke 80 metara pao je komad željeza. Koliko će mu porasti temperatura nakon udara u tlo ako se 80% njegove kinetičke energije pretvori u njegovu unutarnju energiju? Specifični toplinski kapacitet željeza je $460\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

1385. Horizontalno bačena lopta udara u zid na udaljenosti 5 m. Mjesto u kojem udara u zid je 1 m niže od mjesta s kojeg je bačena. Kojom je brzinom lopta bačena? Pod kojim kutom ona udara u zid? Zanemari otpor zraka.

1386. Olovka postavljena vertikalno na stolu pada. Kolike će biti linearna i kutna brzina

a) središta olovke,

b) gornjeg kraja olovke

u trenutku udarca u stol? Duljina olovke je 15 cm.

1387. Horizontalna platforma mase 100 kg rotira kutnom brzinom 10 okr/ s oko vertikalne osi koja prolazi njezinim središtem. Čovjek mase 60 kg stoji na rubu. Kojom će se brzinom ona okretati ako se čovjek pomakne s ruba u središte? Pretpostavi da je platforma homogeni disk, a čovjek točkasta masa.

1388. U vrhovima jednakostraničnog trokuta duljine stranice a nalaze se tri točkasta naboja q. Četvrti naboj q se nalazi u težištu trokuta. Kolika sila djeluje na njega? Kolika sila djeluje na četvrti naboj ako se iz težišta pomakne za $x \ll a$ prema jednom od vrhova?

1389. Ampermetar sa skalom od 0 do 15 mA ima otpor 5 Ω. Kako i s kojim otporom treba spojiti instrument da bi se mogli mjeriti

a) struja jakosti od 0 do 0.15 A,

b) napon od 0 do 150 V?

1390. Proton i α-čestica ulijeću u homogeno magnetsko polje. Brzina čestica je okomita prema smjeru polja. Koliko puta je period kružnog gibanja protona veći od perioda α-čestice?

1391. Objekt oblika kvadrata $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ je fotografiran s udaljenosti od 4.5 m. Dobivena slika je oblika kvadrata $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$. Kolika je fokalna duljina leće fotoaparata? Pretpostavi da je udaljenost objekta od leće velika u usporedbi s fokalnom duljinom.

C) Rješenja iz matematike

3063. *Odredi sva rješenja* (x, y, z) *sistema jednadžbi*

$$(x+y)(x+y+z) = 90,$$
$$(y+z)(x+y+z) = 105,$$
$$(z+x)(x+y+z) = 255.$$

Rješenje. Nakon zbrajanja jednadžbi dobivamo

$$2(x+y+z)^2 = 450,$$

odnosno

$$(x+y+z)^2 = 225,$$

odakle je

$$x+y+z = 15 \quad \text{ili} \quad x+y+z = -15.$$

Zatim imamo sustav jednadžbi

$$x+y = \pm 6$$
$$y+z = \pm 7 \quad \text{i}$$
$$x+z = \pm 15,$$

kojeg rješavanjem dobivamo rješenja $(8, -2, 9)$ i $(-8, 2, 9)$.

Vanja Ubović (2),
Gimnazija P. Preradovića, Virovitica

3064. *Izračunaj*

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{2006+\cfrac{1}{2007}}}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{2006+\cfrac{1}{2007}}}}}}}.$$

Rješenje. Zamijenimo $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{2006+\cfrac{1}{2007}}}}}$ s x. Sad je početni izraz jednak

$$\frac{1}{2+x}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}=\frac{2+x}{2+x}=1.$$

Vedran Rafaelić (4),
Opća gimnazija, SŠ V. Gortana, Buje

3065. *Ako su a i b duljine stranica trokuta, čija je površina jednaka $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, odredi njegove kutove.*

Rješenje. Iz $\frac{1}{4}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ slijedi

$$a^2+b^2=2ab\sin\gamma,$$
$$a^2-2ab\sin\gamma+b^2=0,$$
$$(a-b)^2+2ab(1-\sin\gamma)=0,$$

iz čega proizlazi $a-b=0$ i $\sin\gamma=1$, odnosno $a=b$ i $\gamma=90^\circ$. Stoga imamo $\alpha=\beta=45^\circ$ i $\gamma=90^\circ$.

Vanja Ubović (2), Virovitica

3066. *Poluopseg tetivnog četverokuta je s, a njegova površina P. Ako je $P=\left(\frac{s}{2}\right)^2$, dokaži da je ovaj četverokut kvadrat.*

Rješenje. Koristimo Heronovu formulu za površinu tetivnog četverokuta i korjenujemo danu jednakost:

$$\sqrt{P}=\sqrt{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$
$$=\sqrt[4]{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$\overset{\text{G-A}}{\leqslant}\frac{s-a+s-b+s-c+s-d}{4}=\frac{s}{2}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $s-a=s-b=s-c=s-d$, tj. $a=b=c=d$. Dakle, za $P=\left(\frac{s}{2}\right)^2$ tetivni četverokut mora imati jednake stranice, pa je on kvadrat.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3067. *Skiciraj u kompleksnoj ravnini sve kompleksne brojeve z za koje je*

$$Im\left(\frac{z+1}{z}\right)^6=0.$$

Prvo rješenje. Kako zadatak kaže, broj $\left(\frac{z+1}{z}\right)^6$ je realan. Svojstvo realnih brojeva je da su jednaki svom konjugiranom paru:

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^6=\overline{\left(\frac{z+1}{z}\right)^6},$$

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^6=\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}\right)^6,$$

$$\left[\left(\frac{z+1}{z}\right)^3+\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}\right)^3\right]\cdot\left[\left(\frac{z+1}{z}\right)^3-\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}\right)^3\right]=0,$$

$$\left(\frac{z+1}{z}+\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}\right)\left(\frac{z+1}{z}-\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}\right)\cdot\left[\left(\frac{z+1}{z}\right)^2-\frac{|z+1|^2}{|z|^2}+\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{z+1}{z}\right)^2+\frac{|z+1|^2}{|z|^2}+\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}\right)^2\right]=0.$$

Imamo nekoliko slučaja. Broj z ne može biti nula.

1°

$$\frac{z+1}{z}=\frac{\bar z+1}{\bar z}$$
$$|z|^2+\bar z=|z|^2+z$$
$$x-yi=x+yi$$
$$y=0.$$

U ovom slučaju je rješenje realna os kompleksne ravnine isključujući ishodište.

2°

$$\frac{z+1}{z}=-\frac{\bar z+1}{\bar z}$$
$$|z|^2+\bar z=-|z|^2-z$$
$$2x^2+2y^2+x-yi+x+yi=0$$
$$x^2+y^2+x=0$$
$$\left(x+\frac12\right)^2+y^2=\frac14.$$

Rješenje je kružnica sa središtem u točki $\left(-\frac12,0\right)$ i radijusom $\frac12$, isključujući ishodište.

3°

$$\frac{(z+1)^2}{z^2}+\frac{(\bar z+1)^2}{\bar z^2}=\pm\frac{|z+1|^2}{|z|^2},$$
$$\frac{z^2+2z+1}{z^2}+\frac{\bar z^2+2\bar z+1}{\bar z^2}=\pm\frac{|z+1|^2}{|z|^2},$$
$$\frac{|z|^4+2\bar z|z|^2+\bar z^2+|z|^4+2z|z|^2+z^2}{|z|^4}=\pm\frac{|z+1|^2}{|z|^2},$$
$$2|z|^4+2(z+\bar z)|z|^2+z^2+\bar z^2=\pm|z|^2|z+1|^2,$$
$$2x^4+4x^2y^2+2y^4+4x(x^2+y^2)$$
$$+x^2-y^2+2xyi+x^2-y^2-2xyi$$
$$=\pm(x^2+y^2)(x^2+2x+1+y^2),$$
$$2x^4+4x^2y^2+2y^4+4x^3+4xy^2+2x^2-2y^2$$
$$=\pm x^4\pm 2x^3\pm x^2\pm 2x^2y^2\pm 2xy^2\pm y^2\pm y^4.$$

a)

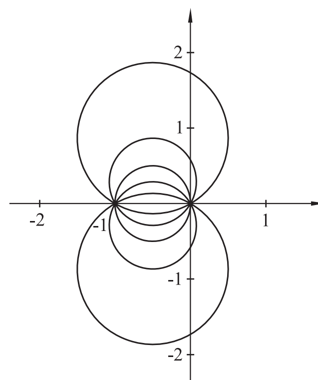
$$x^4+2x^2y^2+y^4+2x^3+2xy^2+x^2-3y^2=0,$$
$$x^2(x+1)^2+y^2(2x^2+2x-3)+y^4=0,$$
$$[x(x+1)+y^2]^2=3y^2,$$
$$(x^2+x+y^2+y\sqrt3)(x^2+x+y^2-y\sqrt3)=0,$$
$$\left(x+\frac12\right)^2+\left(y\pm\frac{\sqrt3}{2}\right)^2=1.$$

Rješenje su dvije kružnice sa središtima u točkama $\left(-\frac12,\pm\frac{\sqrt3}{2}\right)$ i radijusom 1, isključujući ishodište.

b)

$$3x^4+6x^2y^2+3y^4+6x^3+6xy^2+3x^2-y^2=0,$$
$$3x^2(x+1)^2+y^2(6x^2+6x-1)+3y^4=0,$$
$$x^2(x+1)^2+y^2\left(2x^2+2x-\frac13\right)+y^4=0,$$
$$[x(x+1)+y^2]^2=\frac13y^2,$$
$$\left(x^2+x+y^2+y\frac{\sqrt3}{3}\right)\left(x^2+x+y^2-y\frac{\sqrt3}{3}\right)=0,$$
$$\left(x+\frac12\right)^2+\left(y\pm\frac{\sqrt3}{6}\right)^2=\frac13.$$

Rješenje su dvije kružnice sa središtima u točkama $\left(-\frac12,\pm\frac{\sqrt3}{6}\right)$ i radijusom $\frac{\sqrt3}{3}$, isključujući ishodište.



Petar Mlinarić (3),
XV. gimnazija, Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $z=x+iy$. Tada je

$$\frac{z+1}{z}=\frac{x+1+iy}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z}\right)^6 = \frac{6(x^2+y^2+x)^5(-y)-20(x^2+y^2+x)^3(-y)^3}{(x^2+y^2)^6} + \frac{6(x^2+y^2+x)(-y)^5}{(x^2+y^2)^6} = 0$$

odakle je

$$y(x^2+y^2+x)[3(x^2+y^2+x)^4 - 10(x^2+y^2+x)^2y^2+3y^4] = 0. \qquad (1)$$

Da faktoriziramo izraz u uglatoj zagradi uvedimo supstituciju $u=(x^2+y^2+x)^2$ i promatrajmo kvadratnu jednadžbu po u

$$3u^2-10y^2u+3y^4=0.$$

Njezina rješenja su $u_{1,2}=\dfrac{-5\pm 4}{3}y^2$ tj. $u_1=\dfrac{1}{3}y^2$, $u_2=3y^2$. Dobivamo

$$3u^2-10y^2u+3y^4 = 3\left(u-\frac{1}{3}y^2\right)(u-3y^2) = 3\left[(x^2+y^2+x)^2-\frac{1}{3}y^2\right][(x^2+y^2+x^2)^2-3y^2].$$

Sada se jednadžba može faktorizirati

$$3y(x^2+y^2+x)\left(x^2+y^2+x-\frac{\sqrt{3}}{3}y\right) \cdot\left(x^2+y^2+x+\frac{\sqrt{3}}{3}y\right) \cdot(x^2+y^2+x-\sqrt{3}y)(x^2+y^2+x+\sqrt{3}y)=0.$$

Skup svih traženih kompleksnih brojeva je unija pravca $y=0$ i pet kružnica

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{1}{3},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{1}{3},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1.$$

Ur.

3068. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\log_x 10+2\log_{10x}10+3\log_{100x}10=0.$$

Rješenje.

$$\log_x 10+2\log_{10x}10+3\log_{100x}10=0,$$

$$x>0,\ \log x,\ \log(10x),\ \log(100x)\neq 0$$

$$x\neq 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},$$

$$\frac{\log 10}{\log x}+\frac{2\log 10}{\log(10x)}+\frac{3\log 10}{\log(100x)}=0,$$

$$\frac{1}{\log x}+\frac{2}{\log 10+\log x}+\frac{3}{\log 100+\log x}=0,$$

$$\frac{1}{\log x}+\frac{2}{1+\log x}+\frac{3}{2+\log x}=0,$$

$$\log x = t$$

$$\frac{1}{t}+\frac{2}{1+t}+\frac{3}{2+t}=0$$

$$\Longrightarrow 3t^2+5t+1=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$$

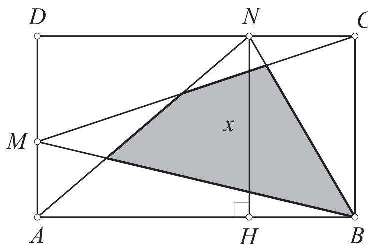
$$\log x_1=\frac{-5+\sqrt{13}}{6},\quad \log x_2=\frac{-5-\sqrt{13}}{6},$$

$$x_1=10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}},\quad x_2=10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}.$$

Vlatka Kos-Grabar (4),
Opća gimnazija, SŠ Zlatar, Zlatar

3069. *Na stranicama $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ pravokutnika ABCD dane su točke M i N. Dokaži da je površina presjeka trokuta ABN i BCM jednaka površini onog dijela pravokutnika koji je izvan ova dva trokuta.*

Rješenje. Najprije spustimo okomicu iz točke N na stranicu $\overline{AB}$ čije nožište je točka H i x je tražena površina.



Sada vidimo da površinu trokuta ABN možemo zapisati kao:

$$P_{\triangle ABN} = \frac{1}{2}|NH| \cdot |AB| = \frac{1}{2}P_{\square ABCD}. \quad (1)$$

Na isti način dobijemo:

$$P_{\triangle BCM} = \frac{1}{2}P_{\square ABCD}. \quad (2)$$

Sada imamo

$$P_{\square ABCD} - P_{\triangle ABN} - P_{\triangle BCM} + x = P_o, \ (*)$$

gdje je P_o površina onog dijela pravokutnika koji je izvan ova dva trokuta.

Zbog (1) i (2) $(*)$ postaje

$$P_{\square ABCD} - \frac{1}{2}P_{\square ABCD} - \frac{1}{2}P_{\square ABCD} + x = P_o$$

$$\Longrightarrow \ x = P_o$$

Ivan Papić (4), III. gimnazija, Osijek

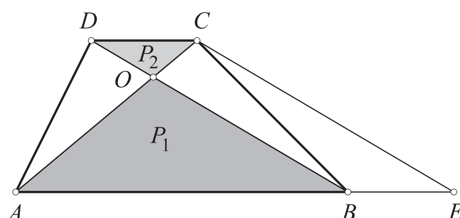
3070. *Ako su površine trokuta određenih bazama trapeza i sjecištem njegovih dijagonala jednake p^2 i q^2, dokaži da je površina trapeza jednaka $(p+q)^2$.*

Rješenje. Ako vrhom C trapeza povučemo paralelu s pravcem BD dobivamo $\triangle AEC$ jednake površine kao što je površina trapeza. Neka je $P_1 = p^2$, $P_2 = q^2$, P površina danog trapeza, v_1 visina $\triangle ABO$ i v_2 visina $\triangle CDO$, obje iz vrha O. Zbog $\triangle AEC \sim \triangle ABO$ je

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{v_1}{v_1+v_2}. \quad (1)$$

A zbog $\triangle AEC \sim \triangle CDO$ je

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{v_2}{v_1+v_2}. \quad (2)$$



Zbrajanjem (1) i (2) dobivamo

$$\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = 1,$$

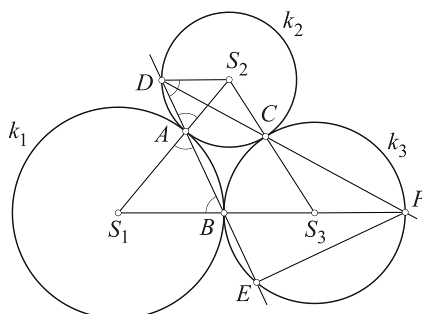
$$\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2},$$

odnosno $\sqrt{P} = p+q$, dakle $P = (p+q)^2$.

Vanja Ubović (2), Virovitica

3071. *Kružnice k_1, k_2, k_3 se u parovima dodiruju izvana. Neka su A, B, C točke dodira k_1 i k_2, k_1 i k_3, k_2 i k_3, tim redom. Pravac AB siječe k_2 i k_3 u D i E, tim redom. Pravac DC po drugi put siječe k_3 u točki F. Dokaži da je trokut DEF pravokutan.*

Rješenje.

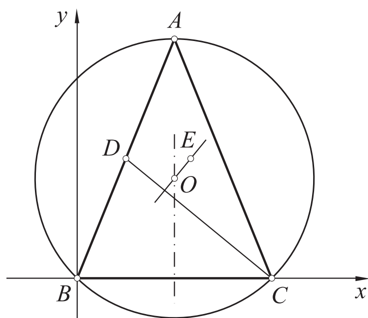


Točke A, B, C nalaze se na pravcima S_1S_2, S_1S_3, S_2S_3. Iz $\sphericalangle ABS_1 = \sphericalangle S_1AB = \sphericalangle S_2AD = \sphericalangle ADS_2$ slijedi da su pravci DS_2 i BS_1 paralelni. Analogno dokazujemo da su DS_2 i FS_3 paralelni. Pa iz tranzitivnosti paralelnosti imamo $BS_1 \| FS_3$, a kako se S_3 nalazi na BS_1 onda se tu nalazi i F, pa je BS_3F jedan pravac, tj. $\overline{BF}$ je promjer od k_3. Kut $\sphericalangle FED = \sphericalangle FEB$ nad promjerom $\overline{BF}$ je pravi pa je i DEF pravokutan trokut.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3072. *Točka O je središte opisane kružnice trokuta ABC, $\overline{CD}$ je njegova težišnica, a E je težište trokuta ACD. Dokaži da je OE okomito na CD ako i samo ako je trokut ABC jednakokračan, pri čemu je $|AB| = |AC|$.*

Prvo rješenje. Pridružimo koordinate $B(O,O)$, $C(x_C,O)$, $A(x_A,y_A)$. Imamo $D\left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_A}{2}\right)$ i $E\left(\frac{x_C+x_A+\frac{x_A}{2}}{3}, \frac{y_A+\frac{y_A}{2}}{3}\right)$ $= E\left(\frac{x_C}{3}+\frac{x_A}{2}, \frac{y_A}{2}\right)$.



O se nalazi na sjecištu simetrala stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$. $s_{BC}\ldots x = \frac{x_C}{2}$. Koeficijent smjera pravca AB je $k_{AB} = \frac{y_A}{x_A}$, te je jednadžba simetrale $s_{AB}\ldots y - \frac{y_A}{2} = -\frac{x_A}{y_A}\left(x - \frac{x_A}{2}\right)$, a koordinate točke O su $x_O = \frac{x_C}{2}$, $y_O = -\frac{x_A}{y_A}\left(\frac{x_C - x_A}{2}\right) + \frac{y_A}{2}$.

OE je okomito na CD ako i samo ako je $k_{CD} \cdot k_{OE} = -1$. Imamo

$$k_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{y_A}{x_A - 2x_C},$$

$$k_{OE} = \frac{y_O - y_E}{x_O - x_E} = \frac{3x_A(x_A - x_C)}{y_A(x_C - 3x_A)}, \quad \text{tj.}$$

$$k_{CD} \cdot k_{OE} = \frac{y_A}{x_A - 2x_C} \cdot \frac{3x_A(x_A - x_C)}{y_A(x_C - 3x_A)} = -1$$

$$\iff 3x_A^2 - 3x_A x_C = 2x_C^2 + 3x_A^2 - 6x_A x_C - x_A x_C$$

$$\iff x_A = \frac{x_C}{2}.$$

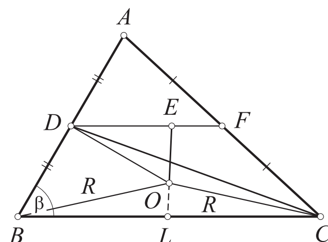
Vidimo da je $k_{CD} \cdot k_{OE} = -1$ zadovoljeno samo kada je $x_A = \frac{x_C}{2}$, tj. kada je A na simetrali stranice $\overline{BC}$, odnosno kada je trokut jednakokračan s jednakim kracima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Vedran Rafaelić (4), Buje

Drugo rješenje. Pravci OE i CD su okomiti ako i samo ako je $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$.

Iz $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$ je

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO}.$$



Nadalje,

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

Skalarni produkt vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ je $\vec{u} \cdot \vec{v} = |u| \cdot |v| \cos\theta$, gdje je θ kut između $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Sada je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{DC} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO}\right)\left(\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&\quad - \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} \\
&= \frac{1}{2}ca\cos\beta - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{6}ac\cos\beta \\
&\quad - Ra\cos\sphericalangle OBC + \frac{1}{2}Rc\cos\sphericalangle ABO \\
&= \frac{1}{3}ac\cos\beta - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{3}a^2 \\
&\quad - a \cdot \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}c \\
&= \frac{1}{3}ac\cos\beta - \frac{1}{6}a^2.
\end{aligned}$$

Iz kosinusovog poučka je

$$ac\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2},$$

pa je

$$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{6}(c^2 - b^2),$$

a ovo je jednako nuli ako i samo ako je $b = c$, tj. ako i samo ako je $OE \perp DC$.

Ur.

3073. *Dužine* $\overline{AH}$, $\overline{BK}$, $\overline{CL}$ *su visine proizvoljnog trokuta* ABC. *Dokaži jednakosti*

$$\begin{aligned}
|AK| \cdot |BL| \cdot |CH| &= |AL| \cdot |BH| \cdot |CK| \\
&= |HK| \cdot |KL| \cdot |LH|.
\end{aligned}$$

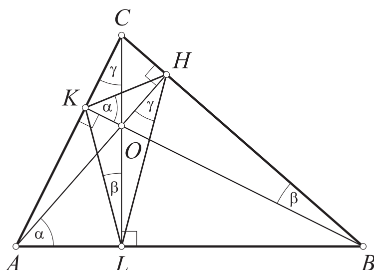
Rješenje. Prva jednakost. Ako je O ortocentar trokuta imamo:

$$\frac{P_{AOC}}{P_{BOC}} = \frac{P_{ALC} - P_{ALO}}{P_{BLC} - P_{BLO}} = \frac{\frac{1}{2}|AL|(|LC| - |LO|)}{\frac{1}{2}|BL|(|LC| - |LO|)} = \frac{|AL|}{|BL|}.$$

Slično i

$$\frac{P_{AOB}}{P_{AOC}} = \frac{|BH|}{|CH|} \quad \text{te} \quad \frac{P_{BOC}}{P_{AOB}} = \frac{|CK|}{|AK|}.$$

Množenjem tih jednakosti dobivamo prvu traženu jednakost.



Druga jednakost. Četverokut $ABHK$ je tetivni ($\overline{AB}$ je hipotenuza pravokutnih trokuta ABK i ABH) pa je $\sphericalangle BAH = \sphericalangle BKH = \alpha$. Analogno je $\sphericalangle CLK = \sphericalangle CBK = \beta$, te $\sphericalangle AHL = \sphericalangle ACL = \gamma$.

Sada je iz $\triangle ALH$ po sinusovom poučku $\frac{|AL|}{\sin\gamma} = \frac{|LH|}{\sin\alpha}$, iz $\triangle BKH$ je $\frac{|BH|}{\sin\alpha} = \frac{|HK|}{\sin\beta}$, a iz $\triangle CKL$ je $\frac{|CK|}{\sin\beta} = \frac{|KL|}{\sin\gamma}$. Množenjem tih jednakosti dobivamo i drugu jednakost.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3074. *Dokaži da u svakom trokutu vrijedi*

$$\frac{s}{R} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

gdje je s njegov poluopseg.

Prvo rješenje. Uvrštavajući izraz za s u lijevu stranu jednakosti i koristeći sinusov poučak dobiva se

$$\frac{s}{R} = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Kako su α, β i γ kutovi trokuta vrijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \text{tj.} \quad \gamma = \pi - \alpha - \beta.$$

U desnu stranu jednakosti se može uvrstiti izraz za γ, a kasnije iskoristiti formulu pretvorbe umnoška u zbroj

$$\begin{aligned}
4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}
&= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&= 2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&\quad + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
&= \sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha + \sin\beta.
\end{aligned}$$

Kako vrijedi

$$\sin\gamma = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha+\beta),$$

dokaz je gotov.

Petar Mlinarić (3), Zagreb

Drugo rješenje. Najprije dokažimo da za svaki trokut vrijedi

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \qquad (1)$$

Najprije imamo:

$$\begin{aligned}
2\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \cos\alpha + 1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1\\
&= \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{2bc}\\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\\
&= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}\\
&= \frac{2s(s-a)}{bc}.
\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi (1).

Nadalje, cikličkim zamjenama dobivamo

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \qquad (2)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \qquad (3)$$

Ako pomnožimo (1), (2) i (3) dobivamo

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s^2\cdot s(s-a)(s-b)(s-c)}{(abc)^2}}$$

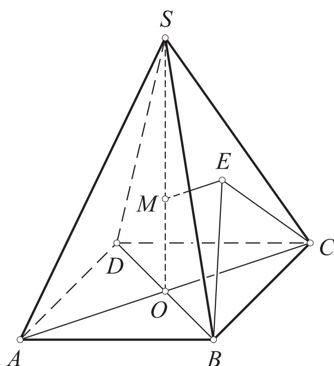
$$= \sqrt{\frac{s^2 \cdot P^2}{(abc)^2}} = \frac{sP}{abc} = \frac{4sP}{4abc} = \frac{s}{4R}.$$

Odavde dobivamo jednakost koju smo trebali dokazati.

Ivan Papić (4), Osijek

3075. *Odredi ravninski kut pri vrhu pravilne čeverostrane piramide, ako se središte upisane podudara sa središtem opisane joj sfere.*

Rješenje.



Neka je M zajedničko središte upisane i opisane sfere. Iz točke M spustimo okomicu na stranu SBC. Nožište E te okomice je središte opisane kružnice trokuta SBC. Nadalje imamo: $|BE| = |BO|$ i $|CE| = |CO|$ jer su to tangente na upisanu sferu iz istih točaka. Odavde slijedi da su trokuti BEC i BOC sukladni, pa je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BOC = 90^\circ$ i $\sphericalangle BSC = 45^\circ$.

Ur.

3076. *Četiri broja su uzastopni članovi geometrijskog niza. Njihov zbroj je 13, a zbroj njihovih kvadrata je 1261. Odredi te brojeve.*

Rješenje.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 13$$
$$\underline{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1261}$$

$$a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 13$$
$$\underline{a_1^2(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 1261}$$

$$a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 13, \qquad (1)$$

$$a_1^2 \cdot \frac{q^8 - 1}{q^2 - 1} = 1261. \qquad (2)$$

Kvadriranjem (1) i dijeljenjem s (2) dobiva se

$$\frac{\dfrac{(q^4-1)^2}{(q-1)^2}}{\dfrac{q^8-1}{q^2-1}} = \frac{13^2}{1261},$$

$$\frac{\dfrac{(q^2+1)^2(q+1)^2(q-1)^2}{(q-1)^2}}{\dfrac{(q^4+1)(q^2+1)(q^2-1)}{q^2-1}} = \frac{13}{97},$$

$$= \frac{(q^2+1)(q+1)^2}{q^4+1} = \frac{13}{97},$$

$$84q^4 + 194q^3 + 194q^2 + 194q + 84 = 0,$$

$$42q^2 + 97q + 97 + \frac{97}{q} + \frac{42}{q^2} = 0.$$

Supstitucija $t = q + \dfrac{1}{q} \implies$

$$t^2 = q^2 + \frac{1}{q^2} + 2.$$

$$42\left(q^2 + \frac{1}{q^2} + 2\right) + 97\left(q + \frac{1}{q}\right) + 13 = 0,$$

$$42t^2 + 97t + 13 = 0,$$

$$t_1 = -\frac{13}{6}, \quad t_2 = -\frac{1}{7}.$$

1° $t = -\dfrac{13}{6}$:

$$6q^2 + 13q + 6 = 0,$$

$$q_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{12},$$

$$q_1 = -\frac{3}{2}, \quad q_2 = -\frac{2}{3}.$$

Iz (1) za $q_1 = -\dfrac{3}{2}$ dobivamo $a_1 = -8$. Brojevi su -8, 12, -18, 27.

Iz (1) za $q_2 = -\dfrac{2}{3}$ imamo $a_1 = 27$. Brojevi su 27, -18, 12, -8.

$2^\circ \quad t = -\frac{1}{7}$:

$$7q^2 + q + 7 = 0,$$

$$q_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-195}}{14}.$$

Ovaj slučaj nema realnih rješenja.

Rješenje su brojevi $-8,\ 12,\ -18,\ 27$.

Petar Mlinarić (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 266. *Zahvaljujući posebnoj bjelančevini u koju pohranjuje energiju, buha veličine 3 mm može skočiti uvis 33 cm. Kad bi ljudi mogli skakati kao buhe, proporcionalno s visinom, koliko bi uvis mogao skočiti čovjek visok 180 cm? Koliko bi energije potrošio za takav skok ako mu je masa 75 kg?*

Rješenje.

$$v_{\text{buhe}} = 3 \text{ mm} = 0.003 \text{ m}$$

$$h_{\text{buhe}} = 33 \text{ cm} = 0.33 \text{ m}$$

$$v_{\text{čovjeka}} = 180 \text{ cm} = 1.8 \text{ m}$$

$$h_{\text{čovjeka}} = ?$$

$$\frac{h_{\text{buhe}}}{v_{\text{buhe}}} = \frac{0.33\text{m}}{0.003 \text{ m}} = 110$$

Buha skoči 110 puta više od svoje visine.

$$h_{\text{čovjeka}} = 110 \cdot 1.8 \text{ m} = 198 \text{ m}$$

$$E_{gp} = mgh = 75 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 198 \text{ m}$$

$$= 148\,500 \text{ J} = 148.5 \text{ kJ}$$

Čovjek bi mogao skočiti 198 metara uvis, a za skok bi potrošio 148.5 kJ energije.

Lea Južnić (8),
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice

OŠ – 267. *Kamen obujma 5 litara ima gustoću* 3200 *kg/m*^{3}.

a) Koliko bi pokazala vaga kad bi ga vagali na kopnu?

b) Koliko bi pokazala vaga kad bi ga vagali uronjenog u vodu?

Rješenje.

$$V_k = 5 \text{ L} = 5 \text{ dm}^3 = 0.005 \text{ m}^3$$

$$\rho_k = 3200 \text{ kg/ m}^3$$

$$\rho_{\text{vode}} = 1000 \text{ kg/ m}^3$$

a) $m_k = ?$

b) $\frac{G - F_u}{g} = ?$

a) $m_k = \rho_k \cdot V_k$

$$m_k = 3200 \text{ kg/ m}^3 \cdot 0.005 \text{ m}^3 = 16 \text{ kg}$$

b) U vodi bi na kamen djelovali težina i uzgon.

$$G = m \cdot g = 16 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 160 \text{ N}$$

$$F_u = V_k \cdot \rho_{\text{vode}} \cdot g$$

$$= 0.005 \text{ m}^3 \cdot 1000 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 50 \text{ N}$$

Sila koja djeluje na kamen u vodi jednaka je razlici težine i uzgona i iznosi 110 N. Dakle, vaga bi pokazala 11 kg.

Karlo Radečić (7),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 268. *Izračunajte promjer i površinu mrlje koja bi nastala kad bi se decilitar ulja izlio na pučini za vrijeme potpune bonace. Pretpostavite da bi mrlja bila kružnog oblika i da bi se sve molekule ulja poredale jedna do druge. Dimenzije molekule ulja su 2.5 nm (2.5 milijuntnine milimetra).*

Rješenje.

$$V = 1 \text{ dl} = 0.1 \text{ l} = 0.1 \text{ dm}^3$$

$$= 0.0001 \text{ m}^3 = 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$d = h = 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

(visina mrlje je jednaka dimenziji molekule ulja)

$S = ?$

$D = ?$

Volumen mrlje se neće promijeniti kad ju izlijemo i bit će jednak umnošku njene površine i visine.

$$V = Sh$$

$$S = \frac{V}{h} = \frac{10^{-4} \text{ m}^3}{2.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 40\,000 \text{ m}^2$$

$$S = r^2\pi = \frac{D^2\pi}{4}$$

$$D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 40\,000}{\pi}}$$

$$D = 225.7 \text{ m}$$

Površina mrlje će biti $40\,000$ m^2, a promjer približno 225.7 metara.

Katarina Komljenović (8),
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice

OŠ – 269. *Kad je žaruljica spojena na napon 1.5 V kroz nju teče struja 0.125 A, na naponu od 3 V struja kroz žaruljicu iznosi 0.2 A, a kad je napon izvora 4.5 V struja je 0.225 A. Izračunajte električni otpor žaruljice u sva tri slučaja i objasnite zašto se on mijenja.*

Rješenje.

U / V	I / A	$R = \frac{U}{I}$ /Ω
1.5	0.125	12
3	0.2	15
4.5	0.225	20

Na žaruljici koja svijetli ne vrijedi Ohmov zakon jer otpor raste s temperaturom. Zbog porasta temperature žarne niti povećava se i njen otpor.

Ivan Kulušić (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

1371. *Metak izlazi iz puščane cijevi brzinom od 800 m/s. Cijev je duga 2 m. Nađite prosječnu akceleraciju metka u cijevi. Ako je ispaljen horizontalno s visine 1.6 m, na kojoj će udaljenosti pasti na zemlju. Zanemari otpor zraka.*

Rješenje.

$$v = 800 \text{ m/ s}$$

$$l = 2 \text{ m}$$

$$\underline{H = 1.6 \text{ m}}$$

$$a, D = ?$$

Pretpostavimo li da se tijelo u cijevi giba jednoliko ubrzano vrijedi:

$$v = \sqrt{2al},$$

$$a = \frac{v^2}{2l} = 160\,000 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Po načelu neovisnih gibanja imamo:

$$H = \frac{gt^2}{2},$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 0.57 \text{ s},$$

$$D = vt,$$

$$D = 456 \text{ m}.$$

Saša Romić (1),
Gimnazija Požega, Požega

1372. *Sat njihalica ide točno na* $0\,^\circ C$. *Koliko zaostane za 1 dan na temperaturi* $20\,^\circ C$? *Linearni koeficijent rastezanja niti je* $\beta = 1.7 \cdot 10^{-5}/^\circ$. *Pretpostavite matematičko njihalo.*

Rješenje.

$$t_0 = 0\,^\circ\text{C}$$

$$t = 20\,^\circ\text{C}$$

$$\underline{\beta = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}}$$

$$\Delta T = ?$$

Duljina njihala na $20\,^\circ$C je

$$l = l_0(1 + \beta(t - t_0)).$$

Omjer perioda na $20\,^\circ$C i na $0\,^\circ$C je

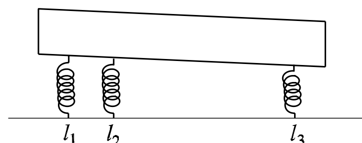
$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \beta(t - t_0)}.$$

Za jedan dan sat kasni

$$\Delta t = T_{\text{dan}} - T_{\text{dan}}\frac{T_0}{T} = 14.68 \text{ s}.$$

Vanja Ubović (2),
Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica

1373. *Greda mase* m *i duljine* l *leži pričvršćena na tri identične opruge konstante* k *kao na slici. Opruge se nalaze na udaljenostima* l_1, l_2 *i* l_3 *od jednog kraja grede. Kolikim silama opruge djeluju na gredu u ravnoteži?*



Rješenje. Sile koje djeluju na gredu su sila teža u težištu grede vertikalno prema dolje te sile F_1, F_2 i F_3 vertikalno prema gore na udaljenostima l_1, l_2 i l_3 od jednog kraja grede.

Za sile opruga na gredu imamo

$$F_i = kx_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdje su x_1, x_2 i x_3 pomaci pojedine opruge od ravnotežnog položaja. Kako greda nije savijena, za pomake vrijedi geometrijska relacija

$$\frac{x_2 - x_1}{l_2 - l_1} = \frac{x_3 - x_2}{l_3 - l_2}.$$

U ravnoteži su ukupna sila i moment sile na gredu jednaki nuli:

$$F_1 + F_2 + F_3 = mg,$$

$$F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 = mg\frac{l}{2},$$

pa za pomake vrijedi:

$$kx_1 + kx_2 + kx_3 = mg,$$

$$kx_1 l_1 + kx_2 l_2 + kx_3 l_3 = mg\frac{l}{2}.$$

Rješavanjem tri jednadžbe s tri nepoznanice x_1, x_2 i x_3 dobiva se:

$$F_1 = kx_1 = \frac{mg}{4} \cdot \frac{2l_2^2+2l_3^2-2l_1l_2-2l_1l_3+2ll_1-ll_2-ll_3}{l_1^2+l_2^2+l_3^2-l_1l_2-l_1l_3-l_2l_3},$$

$$F_2 = kx_2 = \frac{mg}{4} \frac{2l_1^2+2l_3^2-2l_1l_2-2l_2l_3+2ll_2-ll_1-ll_3}{l_1^2+l_2^2+l_3^2-l_1l_2-l_1l_3-l_2l_3},$$

$$F_3 = kx_3 = \frac{mg}{4} \frac{2l_1^2+2l_2^2-2l_1l_3-2l_2l_3+2ll_3-ll_1-ll_2}{l_1^2+l_2^2+l_3^2-l_1l_2-l_1l_3-l_2l_3}.$$

Ur.

1374. *Dokažite da se prilikom elastičnog sudara dvije nerelativističke čestice jednake mase raspršuju pod pravim kutom u sustavu u kojem je jedna čestica mirovala prije sudara.*

Rješenje. U elastičnom sudaru dviju nerelativističkih čestica iz zakona očuvanja energije imamo

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \implies v_0^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

gdje je v_0 brzina upadne čestice prije sudara, a v_1 i v_2 brzine čestica nakon sudara.

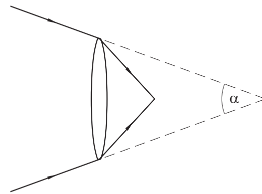
Prema zakonu očuvanja impulsa je

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \implies \vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Iz gornje dvije relacije slijedi da su vektori $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ međusobno pod pravim kutom jer iznosi tih vektora i njihove vektorske sume $\vec{v}_0$ zadovoljavaju Pitagorin poučak.

Ur.

1375. *Konvergentni snop svjetlosti oblika stošca kuta $\alpha = 40^\circ$ pada na tanku leću promjera 20 cm i jakosti 5 dioptrija. Koji je novi kut stošca (vidi sliku)?*



Rješenje.

$$\alpha = 40^\circ$$
$$d = 20 \text{ cm}$$
$$\underline{D = 5 \text{ m}^{-1}}$$
$$\beta = ?$$

Točka u koju bi snop svjetlosti konvergirao da nema leće nalazi se na udaljenosti l od leće, odakle je

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{l} \implies l = \frac{d}{2\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Položaj slike te točke dobiva se iz jednadžbe leće:

$$-\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = D,$$

gdje je predznak uz $\frac{1}{l}$ negativan jer je to sjecište virtualnih zraka.

Novi kut stošca dobiva se iz:

$$\text{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{l'} \implies \beta = 2\,\text{arc tg}\,\frac{d}{2l'} = 81.7^\circ.$$

Ur.

1376. *Atomska masa prirodnog bora je 10.811. On se sastoji od dva izotopa masa 10.013 i 11.009. Nađite njihove udjele.*

Rješenje.

$$A_r(\mathrm{B}) = 10.811$$
$$A_r(^{10}\mathrm{B}) = 10.013$$
$$A_r(^{11}\mathrm{B}) = 11.009$$
$$x = ?,\ y = ?$$

Ako s x označimo udio izotopa $^{10}\mathrm{B}$, a s y $^{11}\mathrm{B}$, tada je $x + y = 1$, odnosno

$$A_r(^{10}\mathrm{B}) \cdot x + A_r(^{11}\mathrm{B}) \cdot y = A_r(\mathrm{B}).$$

Dalje zadatak rješavamo kao sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice.

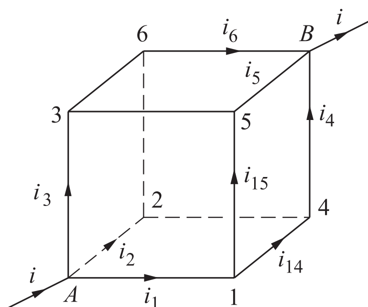
Rješenje je $x = 0.199$ i $y = 0.801$.

Dakle, udio borovog izotopa atomske mase 10.013 je 19.9%, a izotopa atomske mase 11.009 je 80.1%.

Tomislav Maričević (2), Gimnazija Požega, Požega

1377. *Osam identičnih žica otpora r spojeno je tako da čine bridove kocke. Koliki je ekvivalentni otpor između dva suprotna vrha na prostornoj dijagonali?*

Rješenje. Označimo vrhove kocke i jakosti struja između vrhova kao na slici.



U vrhu A vrijedi $i = i_1 + i_2 + i_3$. Zbog simetrije kocke jakosti struje od vrha A do vrhova 1, 2 i 3 moraju biti jednake, odnosno:

$$i_1 = i_2 = i_3 = \frac{i}{3}.$$

Isto vrijedi i za jakosti struja od vrhova 4,5 i 6 prema B:

$$i_4 = i_5 = i_6 = \frac{i}{3}.$$

U vrhu 1 vrijedi $i_1 = i_{14} + i_{15}$, a zbog simetrije $i_{14} = i_{15}$ iz čega slijedi:

$$i_{14} = i_{15} = \frac{i_1}{2} = \frac{i}{6}.$$

Pad napona između točaka A i B je suma padova napona preko vrhova 1 i 4:

$$u_{AB} = i_1 r + i_{14} r + i_4 r = \frac{5}{6} ir.$$

Ekvivalentni otpor između vrhova A i B je:

$$R_{AB} = \frac{u_{AB}}{i} = \frac{5}{6} r.$$

Ur.

Rješenja zabavne matematike

Broj 365

Traženi prikazi broja 365 pomoću dvaju kvadrata: $365 = 13^2 + 14^2 = 2^2 + 19^2 = 39^2 - 34^2 = 183^2 - 182^2$.

Neki prikazi broja 365 pomoću triju kvadrata: $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2 + 14^2 = 1^2 + 20^2 - 6^2 = 85^2 - 84^2 + 14^2 = 13^2 + 50^2 - 48^2 = 2^2 + 181^2 - 180^2 = 15^2 + 36^2 - 34^2 = 89^2 - 80^2 - 34^2 = 39^2 - 30^2 - 16^2 = 39^2 - 290^2 + 288^2 = 33^2 + 180^2 - 182^2 = 183^2 - 70^2 - 168^2$.

Zlatnici

Neka je x broj zlatnika prve vrste, a y broj zlatnika druge vrste. Tada su $25x$ i $21y$ težine zlatnika u gramima. Te težine povezuje jednakost $25x + 21y = 1000$. Sada se lako zaključuje da y mora biti djeljiv s 25. Jedino rješenje diofantske jednadžbe je $x = 19$, $y = 25$. Gold ima 19 zlatnika prve i 25 zlatnika druge vrste.

Koliko puta?

Početak može biti svako od četiriju slova B. Riječ BROJ može se pročitati $13 + 21 + 21 + 13 = 68$ puta.

Uljez

Dovoljna su **dva** mjerenja. U tu svrhu novčići se najprije podijele u tri skupine od po 11 novčića. Uspoređivanjem težine prve i druge, te prve i treće skupine dade se zaključiti je li novčić lakši ili teži od ostalih.

Buketi

Traženi broj x rješenje je jednadžbe

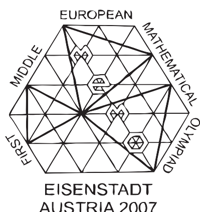
$$200 - 37 - 56 - 44 - 28 - 33 - 40 + 2x = 0.$$

Nalazimo $x = 19$. Tučak je prodao 19 buketa koji su sadržavali sve tri vrste cvijeća.



ZANIMLJIVOSTI

1. srednjoeuropska matematička olimpijada



S osobitim veseljem smo sudjelovali u rađanju srednjoeuropske matematičke olimpijade, novog regionalnog matematičkog natjecanja. Na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi 2006. godine, u Sloveniji, predstavnici devet država srednje Europe, među kojima je i Hrvatska, na inicijativu Austrije imali su inicijalni sastanak s idejom pokretanja novog regionalnog natjecanja. Zapravo je bila namjera proširiti dugogodišnje Austrijsko-poljsko natjecanje na veći broj država. I tako se već prošle godine u Eisenstadtu, u Austriji od 20. do 26. rujna održala 1. srednjoeuropska matematička olimpijada. Na tom je natjecanju sudjelovalo 40 učenika iz sedam država srednje Europe, i to iz Austrije, Češke, Hrvatske, Poljske, Slovačke, Slovenije i Švicarske. Po pravilima, na ovom natjecanju nisu smjeli sudjelovati učenici sudionici međunarodne matematičke olimpijade 2007. godine, a većina država, među njima i Hrvatska, nisu u ekipe uvrštavali učenike koji su maturirali te godine. Ekipu Republike Hrvatske predstavljali su sljedeći učenici:

Melkior Ornik, XV. gimnazija, Zagreb, *Nina Kamčev*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ines Marušić*, V. gimnazija, Zagreb, *Goran Žužić*, V. gimnazija, Zagreb, *Ivan Domladovec*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Ante Malenica*, V. gimnazija, Zagreb.

Voditelji hrvatske ekipe bili su *dr. Ilko Brnetić* i *dr. Mea Bombardelli*.

Sam koncept natjecanja u velikoj je mjeri slijedio ideje Austrijsko-poljskog natjecanja. Tako se i natjecanje sastojalo od dva dijela: pojedinačnog i ekipnog. Pojedinačno natjecanje je održano 22. rujna, a ekipno 23. rujna. U oba dana učenici su rješavali po četiri zadatka u vremenu od po pet sati. Upravo je ekipno natjecanje predstavljalo vrlo zanimljiv novitet u odnosu na sva dosadašnja natjecanja. Učenici su rješavali zadatke zajedno, svaka ekipa u svojoj učionici. Kao i na međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, za ocjenjivanje zadataka bili su zaduženi koordinatori, predstavnici domaćina (ocjene za domaćina su uvijek donošene uz nadzor predstavnika neke druge države). S procesom koordinacije su svi bili vrlo zadovoljni. Iako smo se u nekim slučajevima nadali i većem broju bodova od dobivenih, poštenje i pravednost ocjenjivača bili su neupitni. Po završetku ocjenivanja, doživjeli smo, za nas neobičan, zahtjev da konačni poredak moramo držati u tajnosti do proglašenja rezultata. Znajući za izvrsne rezultate naših učenika, bili smo sigurni da nam na kraju neće zbog toga zamjeriti. U pojedinačnom dijelu ukupno su podijeljene 22 medalje, a nakon Poljske, smo zajedno s Austrijancima imali najviše uspjeha. Ekipno natjecanje na svoj način je i kruna natjecanja i s posebnim smo uzbuđenjem čekali proglašenje: mi voditelji zato što smo znali za izvrsno drugo mjesto, učenici zato jer su se nadali medalji. Nakon proglašenja pojedinačnih rezultata, gdje je od naših učenika srebrnu medalju osvojio *Melkior Ornik*, a brončane *Nina Kamčev*, *Ines Marušić* i *Goran Žužić*, slijedilo je proglašenje ekipnih rezultata. Najprije su prozvani predstavnici Češke kao trećeplasirani. Trenutak kada su naši učenici prozvani da kao drugoplasirani dođu po srebrne medalje i njihovo iznimno veselje nama su bili najupečatljiviji dio natjecanja. Prvo mjesto Poljske su ionako svi očekivali.

Navedimo i rezultate.

Razdioba medalja na pojedinačnom natjecanju.

država	zlatne medalje	srebrne medalje	brončane medalje
Poljska	2	4	0
Austrija	0	1	3
Hrvatska	0	1	3
Slovačka	0	1	2
Švicarska	0	1	0
Češka	0	0	2
Slovenija	0	0	2

Broj bodova i poredak na ekipnom natjecanju.

poredak	država	broj bodova	medalja
1.	Poljska	31	zlatna
2.	Hrvatska	25	srebrna
3.	Češka	21	brončana
4.	Slovačka	21	
5.	Austrija	21	
6.	Švicarska	19	
7.	Slovenija	18	

Samo nas je natjecanje osvojilo na prvi dojam. Uvidom u zadatke možemo reći da se radi o natjecanju visoke razine i lijepih problemskih zadataka, a manji broj sudionika doveo je do vrlo prisne i ugodne atmosfere, koja nas je oduševila. Ujedno, osjećali smo se kao kod kuće, jer bili smo u Gradišću, austrijskoj pokrajini s brojnom hrvatskom dijasporom. S *prof. Thomasom Muehlgassnerom*, glavnim organizatorom, smo, kao i puno puta do sada, pričali na hrvatskom jeziku. Prof. Muehlgassneru, kao i ostalim predstavnicima organizatora, na čelu s *prof. Gerdom Baronom*, smo od srca zahvalni za gostoprimstvo koje su nam pružili i vrlo ugodno provedeno vrijeme. Vožnja brodom po Neusiedler see i izlet u Beč ostat će nam u vrlo ugodnom sjećanju.

Druga srednjoeuropska matematička olimpijada održavat će se od 4. do 10. rujna 2008. godine u Češkoj, u Olomoucu. Poziv za sudjelovanje bit će upućen svim državama sudionicama ovogodišnjeg natjecanja, te Njemačkoj i Mađarskoj.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa u potpunosti je financiralo troškove sudjelovanja na ovom natjecanju. Zahvaljujući financiranju projekta "Pripreme osobito nadarenih mladih matematičara", pripreme su bile organizirane u više navrata, najviše u lipnju i srpnju. Ministarstvu zahvaljujemo na značajnoj potpori.

Voditelji ekipe

Zadaci

Prvi dan

Pojedinačno natjecanje, 22. rujna 2007.

1. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi, takvi da je $a+b+c+d=4$. Dokaži nejednakost

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \leqslant 4.$$

2. Komplet kuglica sadrži n kuglica označenih brojevima $1, 2, 3, \ldots, n$. Dano je $k > 1$ takvih kompleta. Želimo obojiti kuglice u dvije boje, crnu i bijelu, tako da vrijede ova svojstva

a) kuglice označene istim brojem obojene su istom bojom,

b) svaki skup od $k+1$ kuglica označenih brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ (ne nužno različitim) za koje vrijedi $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_{k+1}$, sadrži barem jednu crnu i barem jednu bijelu kuglicu.

Odredi, ovisno o k, najveći mogući broj n za koji je takvo bojenje moguće.

3. Neka je k kružnica i k_1, k_2, k_3, k_4 četiri manje kružnice čija su sva središta O_1, O_2, O_3, O_4 na kružnici k. Za $i = 1, 2, 3, 4$, uz $k_5 = k_1$, kružnice k_i i k_{i+1} sijeku se u A_i i B_i, pri čemu A_i leži na k. Točke $O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4$ leže tim redom na kružnici k i sve su međusobno različite. Dokaži da je $B_1B_2B_3B_4$ pravokutnik.

4. Odredi sve parove (x, y) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x! + y! = x^y.$$

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.)$

Drugi dan

Ekipno natjecanje, 23. rujna 2007.

5. Neka su a, b, c, d realni brojevi koji zadovoljavaju $\frac{1}{2} \leqslant a, b, c, d \leqslant 2$ i $abcd = 1$. Odredite najveću vrijednost izraza

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right).$$

6. Za skup P koji se sastoji od pet točaka ravnine u općem položaju, označimo s $a(P)$ broj šiljastokutnih trokuta s vrhovima iz P. (Za skup točaka ravnine kažemo da su u općem položaju, ako nikoje tri od njih točaka ne leže na istom pravcu.) Odredite najveću moguću vrijednost od $a(P)$.

7. MEMO-tetraedar je tetraedar (trostrana piramida) sa svojstvom da su duljine njegovih šest bridova međusobno različiti prirodni brojevi, od kojih je jedan 2, i jedan 3. Neka $s(T)$ označava zbroj duljina bridova tetraedra T.

a) Odredite sve prirodne brojeve n, za koje postoji MEMO-tetraedar T, takav da je $s(T) = n$.

b) Koliko ima nesukladnih MEMO-tetraedara T za koje vrijedi $s(T) = 2007$?

Dva tetraedra su nesukladna ako se ne mogu preslikati jedan na drugog kompozicijom simetrija u odnosu na ravninu, translacija i rotacija.

(Nije potrebno dokazivati da tetraedri nisu degenerirani, tj. da imaju volumen veći od nule.)

8. Odredite sve prirodne brojeve k takve da postoji cijeli broj a za koji je $(a+k)^3 - a^3$ višekratnik od 2007.

Vrijeme rješavanja svakog dana je 5 sati.

Prigodna poštanska marka
250. obljetnica tiskanja "Arithmetike Horvatszke" M. Š. Bolšića

(Ovaj tekst je uz dozvolu preuzet iz popratnog listića uz izdavanje marke Hrvatske pošte.)

Pučko školstvo u hrvatskim zemljama pod Habsburškom Monarhijom nije još bilo organizirano ni u prvoj polovini 18. stoljeća. Katkad su učiteljsku službu obavljali učitelji koje su postavljale općinske vlasti, a katkad župnici. Oni su učenike poučavali čitanju i pisanju, no tek potkraj prve polovine 18. stoljeća zna se da su ih učili i računati. Sve veće potrebe u trgovini i gospodarstvu prisilili su onodobne učitelje da više pozornosti posvete i računanju. Udžbenici iz računa, međutim tad su postojali samo na stranim jezicima, a puk je trebalo poučavati na hrvatskom jeziku. Zbog toga je Mijo Šilobod Bolšić napisao prvu aritmetiku na hrvatskom jeziku kajkavskim narječjem koja je tiskana godine 1758. u Zagrebu pod naslovom "Arithmetika Horvatszka".

Mijo Šilobod Bolšić rođen je 1725. u Svetom Martinu pod Okićem. Gimnaziju je pohađao u Zagrebu, filozofiju izučavao u Beču, a teologiju u Bologni. Bio je župnik u raznim župama u kajkavskim krajevima Hrvatske. Napisao je nekoliko djela raznolikog sadržaja na hrvatskom i latinskom jeziku, no ipak je najpoznatiji po vrlo opsežnoj aritmetici. Šilobod se u pisanju svoje aritmetike koristio nekim stranim udžbenicima iz aritmetike, a među njima dobro poznatim aritmetičkim udžbenikom koji je napisao talijanski autor Giuseppe Maria Figatelli.

Šilobodov udžbenik podijeljen je na četiri dijela: prvi sadrži četiri računske operacije: zbrajanje, odbijanje, množenje i dijeljenje; drugi dio opisuje sve operacije s razlomcima, treći sadrži jednostavno i složeno trojno pravilo, a četvrti praktične trgovačke račune, dugove, dobitke, gubitke, račun smjese i mnoge druge. U tom četvrtom poglavlju, nalaze se i neka složenija izlaganja, vjerojatno namijenjena učenicima koji su već dobro ovladali prvim trima dijelovima knjige. Na kraju su, na trideset šest nepaginiranih stranica, donesene različite praktične tablice. To potpuno određuje namjenu i svrhu ovoga djela, naime, poznavanje temeljnog računa i svih onih računa koji se pojavljuju u praktičnom životu, osobito u trgovini.

Budući da je taj udžbenik pisan hrvatskim jezikom, u njemu se prvi put pojavljuje i hrvatsko aritmetičko nazivlje. Šilobod se očito poslužio nazivima koji su već postojali u rječnicima, međutim, to je bilo posve nedovoljno je su njegove potrebe bile mnogo veće. S druge strane, složeniji se matematički nazivi nisu mogli lako naći u rječnicima, a nije ih rabio ni puk. Upravo se stoga Šilobod našao pred golemim problemom da prvi put u tiskanoj knjizi zabilježi postojeće matematičko nazivlje, dakako, u kajkavskim krajevima, za koje je pisao svoj udžbenik, zatim da prilagodi nazivlje koje se već nalazilo u rječnicima, posebno kod J. Belostenca, te da napokon sâm skuje nazive koji su mu trebali, koristeći se već postojećim korijenima pojedinih riječi srodnoga značenja u hrvatskome kajkavskom jeziku. Očito da je neke nazive izveo prevođenjem latinskih termina koje je prilagodio kajkavskom jeziku.

Šilobodova aritmetika ima veliko značenje u hrvatskoj kulturi i to posebno zato što je riječ o prvoj aritmetici na hrvatskom jeziku u kojoj se prvi put pojavilo sustavno uporabljeno hrvatsko matematičko nazivlje. Osim toga, ona je imala veliku ulogu u prosvjećivanju hrvatskog puka u doba kad je došlo do velikih potreba za poznavanjem računa u trgovini i gospodarstvu.

Žarko Dadić, Zagreb

Ususret otvorenim danima instituta "Ruđer Bošković" 24. – 26. travnja 2008.

Institut "Ruđer Bošković" najveći je nacionalni istraživački institut u području prirodnih znanosti. Više od 500 znanstvenika instituta radi u područjima eksperimentalne i teorijske fizike i kemije, molekularne biologije i medicine, ekologije i istraživanja mora i računarstva. Naši znanstvenici sudjeluju u brojnim fundamentalnim i primijenjenim istraživanjima i projektima u suradnji s domaćim i međunarodnim sveučilištima, institutima i industrijom.

Znanja, vještine i iskustva naših istraživača doprinose kvalitetnom visokoškolskom obrazovanju. Eksperimentalni uređaji te znanja iz fundamentalnih znanosti, informacijske i računalne usluge visokih su standarda te potiču usvajanje novih vještina važnih za budućnost znanosti. Institut je svojom djelatnošću prepoznatljiv u međunarodnoj znanstvenoj zajednici.

U ostvarivanju svoje društvene uloge institut tradicionalno otvara vrata građanima Hrvatske kroz manifestaciju **OTVORENI DANI INSTITUTA "RUĐER BOŠKOVIĆ".** Stoga vas

POZIVAMO

da posjetite Institut "Ruđer Bošković" zajedno s obitelji, kolegama, suradnicima i prijateljima od 24. – 26. travnja 2008. U organiziranom obilasku instituta znastvenici će vas putem niza predavanja i demonstracija različitih eksperimentalnih postupaka upoznati sa svojim rezultatima, vizijama i vrijednostima za koje se zalažu kroz svoja istraživanja.

Kontakti:

Za organizacijski odbor:
dr. Greta Pifat (tel.: 01/ 4561-127; 4680-239; pifat@irb.hr).

Za škole:
dr. Vlasta Mohaček-Grošev (tel.: 01/ 4561-020; mohacek@irb.hr).

Za dogovorene susrete s gospodarstvenicima (25. 4. od 14-17h):
Matea Novosel (tel: 01/ 2360-111; matea.novosel@r-i.hr).

Institut "Ruđer Bošković"
Bijenička 54
ZAGREB 10000
www.irb.hr



NOVE KNJIGE

Zdravko Kurnik, Diofantske jednadžbe, Matkina biblioteka, HMD, Zagreb, 2007.

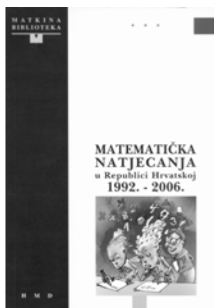


Svake godine velik broj učenika sudjeluje na matematičkim natjecanjima, posebno na općinskim i županijskim, dok manji broj njih dospije i do državnog natjecanja. Svaki se od njih želi što bolje pripremiti za natjecanje, a u tome im puno pomažu njihovi nastavnici. Da bi im se omogućilo da što bolje pripreme svoje nadarene učenike za natjecanje, objavljuju se razne knjižice sa zadacima iz raznih područja matematike, često i ona koja se ne izučavaju u redovnom školskom programu. To omogućuje učenicima da steknu mnogo šire znanje iz matematike kao i vještine rješavanja nestandardnih zadataka.

Profesor Zdravko Kurnik bio je dugogodišnji predsjednik Državnog povjerenstva za matematička natjecanja kao i voditelj mnogobrojnih metodičkih matematičkih radionica. Svoje opsežno iskustvo u radu s učenicima i nastavnicima unio je u brojne knjižice koje su postale neizostavne u nastavi i posebno u dodatnoj nastavi za one učenike koji žele proširiti svoje znanje. Knjižica **Diofantske jednadžbe** jedna je od onih u kojoj je sustavno i metodički obrađeno to područje, koristeći najviše zadatke s različitih natjecanja u Hrvatskoj. O Diofantu koji je živio u III. stoljeću malo se zna, ali su ipak opisani neki zanimljivi detalji iz njegovog života. U knjizi se opisuje Metodička radionica, zatim Metodika rješavanja diofantskih jednadžbi (Pojam diofantske jednadžbe i uvodni primjeri, Osnovna svojstva brojeva, Linearna diofantska jednadžba, Pitagorina jednadžba i Pitagorini brojevi, Metode rješavanja diofatntskih jednadžbi), Diofantske jednadžbe u metodičkoj radionici, a na kraju su i Dodatni zadaci.

Mnogo zadataka je navedeno s rješenjima, a ima i onih ostavljenih za metodičku radionicu ili za samostalno rješavanje. Ovo je korisna knjižica za svakog nastavnika matematike da bi mogao što više pomoći svojim učenicima da zavole matematiku i da se kasnije njome bave.

Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj 1992. – 2006. (za 7. i 8. razred osnovne škole i 1. razred srednje škole), Matkina biblioteka, HMD, Zagreb, 2007. (Priredili: Tvrtko Tadić, Martina Balagović, Daria Popović, Filip Nikšić i Branko Tomić; urednik Zdravko Kurnik.)



Ove godine obilježava se pedeset godina matematičkih natjecanja u Hrvatskoj. Stoga je uredništvo *Matkine biblioteke* odlučilo u tri knjige **Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj** izdati zadatke s rješenjima s općinskih, županijskih i državnih natjecanja povodom proteklih 15 godina. Prva knjiga se pojavila 2007. g. i nadamo se da će se uskoro pojaviti i preostale dvije koje će sadržavati zadatke s rješenjima za osnovnoškolce od 4. do 6. razreda te za srednjoškolce od 2. do 4. razreda.

U Predgovoru ovog izdanja urednik prof. Zdravko Kurnik opisao je natjecanja u Hrvatskoj, općinska, županijska, regionalna i državna, osvrčući se i na popis međunarodnih

natjecanja na kojima naši učenici sudjeluju, a to su Mediteransko matematičko natjecanje, Klokan bez granica, Turnir gradova i Međunarodna matematička olimpijada.

Do sada je većina od tih domaćih natjecanja, kao i neka međunarodna, bila popraćena knjižicom iz biblioteke Elementarna matematika, Matematička natjecanja u izdanju Hrvatskog matematičkog društva i Elementa. Ona je namijenjena učenicima od četvrtog razreda osnovne škole do četvrtog razreda srednje škole.

Sve će ove knjige biti korisne natjecateljima iz matematike, kako osnovne tako i srednje škole, a isto tako i njihovim nastavnicima i mentorima.

Željko Hanjš, Zagreb



KVALIFIKACIJSKI ISPITI

Zadaci s prijemnog ispita na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu 2007. g.

Kao dio razredbenog postupka u prvom upisnom roku, 10. srpnja 2007. godine održan je test provjere znanja na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Uz dozvolu ove institucije, donosimo zadatke koji su bili zadani na tom testu.

⋆ ⋆ ⋆

M-1. Baza brojevnog sustava u kojem vrijedi $32+135=211$ jest
A. 16 **B.** 12 **C.** 8 **D.** 7 **E.** 6

M-2. Zadani su realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, takvi da je $a_1=3$ te $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{100}-a_{99}=5$. Izračunaj $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$.
A. 25 045 **B.** 25 049 **C.** 25 050 **D.** 25 055 **E.** 25 056

M-3. Algebarski razlomak $\left(x+\dfrac{xy+y^2}{x+y}\right)\cdot\left(\dfrac{a^3+8}{x^2-y^2}:\dfrac{a^2-2a+4}{x-y}\right)$ za $|x|\neq|y|$ jednak je:
A. $\dfrac{a+4}{x-y}$ **B.** $\dfrac{a+4}{x+y}$ **C.** $a+2$ **D.** $\dfrac{a-2}{x^2-y^2}$ **E.** $\dfrac{a+2}{(x-y)^2}$

M-4. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $\dfrac{1-2i}{3+4i}+\dfrac{i-4}{6i-8}$ iznosi
A. $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{17}}{10}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{41}}{6}$ **C.** $\dfrac{19}{14}$ **D.** $\dfrac{3}{10}$ **E.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

M-5. Broj 1 nalazi se između nultočaka kvadratne funkcije $y=(m-2)x^2-5x$. Parametar m je iz intervala
A. $\langle -1,3\rangle$ **B.** $\langle 2,7\rangle$ **C.** $\langle 0,5\rangle$ **D.** $\langle 1,8\rangle$ **E.** $\langle 3,9\rangle$

M-6. Ostatak pri dijeljenju polinoma $p(x) = x^{512} - x^{310} + 3$ polinomom $q(x) = x^2 - 1$ je

A. $x + 2$ **B.** $x - 2$ **C.** 0 **D.** 1 **E.** 3

M-7. Neka je $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, a $g(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$. Tada je maksimalna vrijednost koju poprima funkcija $f \circ g$ jednaka

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$ **E.** ne postoji

M-8. Zbroj rješenja jednadžbe $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0$ je

A. -1 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0 **E.** -2

M-9. Rješenje nejednadžbe $\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right) \leq 1$ je

A. $\left\langle -\infty, -\frac{33}{9}\right] \cup \langle 3, \infty\rangle$ **B.** $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$ **C.** $\left\langle -\infty, -\frac{33}{9}\right]$

D. $\left[-\frac{33}{9}, \infty\right\rangle$ **E.** $\langle -\infty, -3\rangle$

M-10. Zajednička tetiva dviju kružnica iz jednog se središta vidi pod kutom od 50°, a iz drugog pod kutom od 70°. Ako su središta kružnica udaljena 3 cm, onda je zbroj polumjera tih kružnica jednak

A. 1.68 cm **B.** 3.45 cm **C.** 1.46 cm **D.** 3.67 cm **E.** 3.14 cm

M-11. U četverokutu se unutrašnji kutovi odnose kao $1 : 3 : 7 : 5$. Najveći kut u tom četverokutu iznosi

A. 155° **B.** 122.5° **C.** 157.5° **D.** 175.5° **E.** 155.7°

M-12. U jednakokračnom trapezu s duljinama osnovica 8 i 5 dijagonale se sijeku pod pravim kutom. Površina tog trapeza je

A. $\frac{169}{4}$ **B.** 40 **C.** $\frac{159}{4}$ **D.** $\frac{153}{4}$ **E.** 42

M-13. U jednakokračnom trokutu s osnovicom duljine $a = 6$ i krakovima duljine $b = 8$ povučena je simetrala kuta uz osnovicu. Sjecište simetrale s krakom dijeli krak u dva dijela, duljine kojih se odnose kao:

A. $5 : 4$ **B.** $7 : 5$ **C.** $3 : 2$ **D.** $8 : 5$ **E.** $4 : 3$

M-14. Prostorna dijagonala kvadra dugačka je $10\sqrt{2}$ cm, a prema ravnini osnovke priklonjena je pod kutom od 45°. Ako je jedan brid osnovke za 2 cm dulji od drugog, obujam kvadra iznosi

A. 480 cm^3 **B.** 360 cm^3 **C.** 1000 cm^3 **D.** $600\sqrt{2}\text{ cm}^3$ **E.** $580\sqrt{2}\text{ cm}^3$

M-15. Osnovka trostrane piramide je jednakokračan trokut osnovice 6 cm i kraka 5 cm. Ako pobočke piramide s bazom zatvaraju kut od 45°, visina piramide je

A. 3.2 cm **B.** 2.6 cm **C.** 3 cm **D.** 1.5 cm **E.** 2 cm

M-16. Baza pravilne uspravne krnje piramide je kvadrat stranice 6 cm, a visina joj je 9 cm. Ako je volumen krnje piramide 273 cm^3, stranica kvadrata gornje baze

iznosi

A. $\frac{10}{3}$ cm **B.** $\frac{7}{2}$ cm **C.** $\frac{11}{3}$ cm **D.** $\frac{13}{3}$ cm **E.** 5 cm

M-17. Površina plašta stošca triput je veća od površine baze stošca. Ako stožac ima volumen 9π, onda visina stošca iznosi

A. 6 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 8 **E.** 5

M-18. Ako je $a = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$, onda je a^{-1} jednako

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 6 **E.** 8

M-19. Koliko nultočaka u intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ima funkcija $y = 2\sin(3x + 7\pi)$?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

M-20. Točka $C(2,2)$ vrh je trokuta ABC. Visina povučena iz vrha A leži na pravcu $2x - 3y + 12 = 0$, a težišnica povučena iz vrha A na pravcu $x + y = 0$. Koordinate vrha B su:

A. $(10, -10)$ **B.** $(18, -22)$ **C.** $(-22, 18)$ **D.** $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{14}{5}\right)$ **E.** $\left(-\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

M-21. Površina dijela lika $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$ koji je nalazi u prvom kvadrantu iznosi

A. $2\pi - 1$ **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** $\frac{5\pi}{3}$ **D.** $\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **E.** $\pi + 2$

M-22. Odredi jednadžbu tangente na luk kružnice $x^2 + y^2 = 1$ u prvom kvadrantu, tako da odsječak na osi y bude dvostruko veći od odsječka na osi x.

A. $y = -2x + \frac{\sqrt{6}}{2}$ **B.** $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **C.** $y = -2x + \sqrt{5}$

D. $y = -x - \sqrt{2}$ **E.** $y = -x + 4$

M-23. Jednadžba hiperbole čija je jedna od asimptota $y = \frac{1}{2}x$, te koja dira pravac $x + y + 1 = 0$ glasi

A. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ **B.** $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ **C.** $x^2 + y^2 = 1$

D. $\frac{3}{4}x^2 - 3y^2 = 1$ **E.** $x \cdot y = 1$

M-24. Žarište F parabole $y^2 = x$ i sjecišta A i B te parabole s pravcem $x = 3$ vrhovi su trokuta ABF, kojemu površina iznosi

A. $\frac{11\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{11}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $11\sqrt{3}$ **E.** $\frac{11\sqrt{3}}{8}$

F-25. Tijelo mase 10 kg položeno je na horizontalnu plohu. Na tijelo djeluje sila $F = 30$ N pod kutem od $30°$ u odnosu na horizontalu. Koliko iznosi sila trenja ako je koeficijent trenja $\mu = 0.2$? ($g = 9.81$ m/ s^2)

A. 16.62 N **B.** 1.662 N **C.** 19.62 N **D.** 22.62 N **E.** 24.82 N

F-26. Tijelo se gurne niz kosinu nagiba $\alpha = 20°$ početnom brzinom i ono se zaustavi (na kosini) nakon prevaljenog puta s_1. Zatim se istom početnom brzinom tijelo

gurne uz kosinu i ono se zaustavi nakon puta $s_2 = s_1/3$. Koliki je koeficijent trenja između tijela i kosine?
A. 0.36 **B.** 0.73 **C.** 0.18 **D.** 1.37 **E.** 0.12

F-27. Dva tijela masa $m_1 = 0.2$ kg i $m_2 = 0.3$ kg nalaze se na ravnoj horizontalnoj podlozi. Tijela su vezana užetom. Ako se trenje pri klizanju zanemari, kolika je napetost užeta pri djelovanju horizontalne vučne sile $F = 1$ N na tijelo mase m_1?
A. 0.5 N **B.** 0.4 N **C.** 0.6 N **D.** 0.1 N **E.** 0 N

F-28. Kada se na oprugu konstante k_1 objesi uteg mase 300 g i na oprugu konstante k_2 uteg mase 500 g, tada su periodi titranja obje opruge jednaki. Koliki mora biti omjer masa tijela obješenih na opruge konstanti k_1 i k_2, da bi tijelo na opruzi konstante k_1 titralo dvostruko većim periodom od perioda tijela na opruzi konstante k_2?
A. 2.40 **B.** 1.67 **C.** 1.2 **D.** 0.6 **E.** 6.67

F-29. U cilindričnom spremniku nalazi se tekućina. Kada se na bočnoj stijenki spremnika probuši rupa, tekućina počinje istjecati brzinom od 4.2 m/ s. Na kojoj udaljenosti po vertikali od prve rupe valja izbušiti rupu iz koje bi tekućina počela istjecati tri puta manjom brzinom? ($g = 9.81$ m/ s^2)
A. 0.8 m **B.** 0.1 m **C.** 1.4 m **D.** 4.2 m **E.** 1.3 m

F-30. Pretpostavimo da parni stroj koji radi kao idealni toplinski stroj (po Carnotovu ciklusu) uzima vodenu paru temperature 200°C. Kolika je maksimalna temperatura vodene pare koja iz stroja izlazi ako je stupanj djelovanja tog stroja 20%?
A. 135°C **B.** 125°C **C.** 115°C **D.** 105°C **E.** 95°C

F-31. Koliku je toplinsku energiju potrebno utrošiti da bi se 10 kg vode temperature 18°C pretvorilo u vodenu paru temperature 100°C? ($c_{\text{vode}} = 4190$ J/ (kgK), $L_i = 2.26 \cdot 10^6$ J/ kg)
A. $3.4 \cdot 10^6$ J **B.** $2.6 \cdot 10^6$ J **C.** $3.34 \cdot 10^5$ J **D.** $2.26 \cdot 10^7$ J **E.** $2.6 \cdot 10^7$ J

F-32. Na niti duljine 1 m obješen je uteg mase 1 kg. Nit može izdržati silu od 11 N. Na koju se najveću visinu iznad ravnotežnog položaja može otkloniti uteg tako da nit održavamo napetom, a da pri titranju nit ne pukne? ($g = 9.81$ m/ s^2)
A. 2 cm **B.** 3 cm **C.** 4 cm **D.** 6 cm **E.** 12 cm

F-33. Baterija elektromotornog napona $\varepsilon = 6$ V i zanemarivog unutrašnjeg otpora stvara kroz električni krug struju jakosti $I = 4.61$ A izmjerenu ampermetrom čiji je unutrašnji otpor $r = 0.1\ \Omega$. Kolika je jakost struje kroz krug ako se ampermetar isključi?
A. 6.11 A **B.** 4.28 A **C.** 4.61 A **D.** 4.99 A **E.** 3.71 A

F-34. Kada se dva otpornika spoje serijski na izvor elektromotorne sile od 12 V (unutarnji otpor se zanemaruje) jakost struje koju daje izvor je 6 A. Ako se otpornici spoje paralelno, jakost struje je 4 puta veća. Koliki su otpori spojenih otpornika?
A. $R_1 = 1\ \Omega,\ R_2 = 1\ \Omega$ **B.** $R_1 = 2\ \Omega,\ R_2 = 1\ \Omega$ **C.** $R_1 = 2\ \Omega,\ R_2 = 2\ \Omega$
D. $R_1 = 3\ \Omega,\ R_2 = 4\ \Omega$ **E.** $R_1 = 1\ \Omega,\ R_2 = 3\ \Omega$

F-35. Koliki je pad napona duž bakrene žice duljine 500 m i promjera 2 mm, ako kroz nju prolazi struja jakosti 2 A? (specifični otpor bakra $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m)
A. 5.41 V **B.** 12.13 V **C.** 2.5 V **D.** 17.2 V **E.** 20.3 V

F-36. Kroz dvije duge paralelne žice međusobno udaljene 10 cm teče struja jakosti 10 A u suprotnim smjerovima. Kolika je jakost magnetskog polja na polovini međusobne udaljenosti tih dviju paralelnih žica?
A. 0 A/ m **B.** 31.8 A/ m **C.** 63.7 A/ m **D.** 15.9 A/ m **E.** 47.7 A/ m

F-37. Dva koherentna izvora svjetlosti daju na zastoru, udaljenom 1.5 m od izvora, pruge interferencije. Udaljenost između prve (središnje) i treće svijetle pruge je 5 cm. Koliki je razmak između izvora ako je valna duljina svjetlosti $\lambda = 650$ nm?
A. 39 μm **B.** 78 μm **C.** 19.5 μm **D.** 39 mm **E.** 19 mm

F-38. Idealan transformator povezan s izmjeničnim izvorom napona efektivne jakosti 120 V ima 200 namotaja u primarnom krugu i 50 namotaja u sekundarnom. Sekundar je povezan sa žaruljom otpora 100 Ω. Kolika je struja u primarnom krugu?
A. 0.055 A **B.** 0.01 A **C.** 0.02 A **D.** 0.075 A **E.** 0.065 A

F-39. Točkasti izvor svjetla nalazi se na optičkoj osi tanke konvergentne leće žarišne daljine 0.2 m. S druge strane leće okomito na optičku os nalazi se zastor na udaljenosti 0.8 m od leće i na zastoru se vidi osvijetljena površina kružnog oblika. Ako se zastor pomakne na udaljenost 0.4 m od leće, veličina osvijetljene površine koju daje izvor se ne promijeni. Koliko je udaljen izvor od leće?
A. 0.2 m **B.** 0.15 m **C.** 0.3 m **D.** 0.1 m **E.** 0.8 m

F-40. Radioaktivni uzorak sadrži 10 μg nuklida ^{131}I. Kolika je aktivnost uzorka ako je vrijeme poluraspada 8 dana? ($N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$ mol^{-1})
A. 56 MBq **B.** 24 GBq **C.** 46 GBq **D.** 12 TBq **E.** 28 GBq

Rješenja zadataka

M–1	E	M–2	C	M–3	C	M–4	D
M–5	B	M–6	E	M–7	B	M–8	D
M–9	A	M–10	B	M–11	C	M–12	A
M–13	E	M–14	A	M–15	D	M–16	E
M–17	A	M–18	B	M–19	D	M–20	B
M–21	E	M–22	C	M–23	D	M–24	A
F–25	A	F–26	B	F–27	C	F–28	A
F–29	A	F–30	D	F–31	E	F–32	D
F–33	D	F–34	A	F–35	A	F–36	C
F–37	A	F–38	D	F–39	C	F–40	C

Rješenje nagradnog natječaja br. 180

Rješenje. Želimo naći broj rješenja jednažbe

$$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x} = 0.$$

Stavljajući $x = y^{210}$, dovoljno je naći broj nenegativnih nultočaka polinoma

$$y^{105} - y^{70} - y^{42} + y^{30},$$

kojeg faktoriziramo

$$y^{30}(y-1)[y^{40}(y^{34} + y^{33} + \ldots + y + 1) - (y^{11} + y^{10} + \ldots + y + 1)].$$

Označimo li

$$p(x) = y^{40}(y^{34} + y^{33} + \ldots + y + 1) - (y^{11} + y^{10} + \ldots + y + 1)$$

lako se vidi da je $p(0) = -1$ i $p(1) = 23$. Zato polinom $p(y)$ ima nultočku između 0 i 1. S druge strane, predznak koeficijenata od $p(y)$ se samo jednom mijenja, pa $p(y)$ ima najviše jednu pozitivnu nultočku. Dakle, postoje tri nenegativna rješenja polinoma $p(y)$, naime 0, 1 i neki broj strogo između 0 i 1. Zato polazna jednadžba ima tri realna rješenja.

Knjigom je nagrađen rješavatelj:

Edin Ajanović (3), Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH.

Riješili zadatke iz br. 1/229

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Edin Ajanović* (3), I. bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH, 3063–3066, 3068, 3070, 3071, 3073, 3076; *Saudin Dizdarević* (2), MSŠ "Hazim Šabanović", Visoko, BiH, 3063, 3065, 3070; *Vlatka Kos-Grabar* (4), Opća gimnazija, SŠ Zlatar, Zlatar, 3068; *Petar Mlinarić* (3), XV. gimnazija, Zagreb, 3065, 3067, 3068, 3076; *Ivan Papić* (4), III. gimnazija, Osijek, 3063, 3065, 3066, 3068–3070; *Kuzma Pecotić* (4), Gimnazija "Čedo Žic", Krk, 3063–3066, 3068–3074; *Vedran Rafaelić* (4), Opća gimnazija, SŠ Vladimira Gortana, Buje, 3064–3074, 3076; *Vanja Ubović* (2), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 3063, 3065, 3070.

b) Iz fizike: *Lea Južnić* (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice, 266; *Katarina Komljenović* (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice, 268; *Ivan Kulušić* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 266–269; *Filip Mance* (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice, 267; *Karlo Radečić* (7), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 267, 268; *Jadran Berbić* (4), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1371, 1372; *Ivan Dokoza* (2), Gimnazija Požega, Požega, 1371, 1372, 1376; *Tomislav Dujmović* (2), Gimnazija Požega, Požega, 1372, 1376; *Lucija Ivanda* (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1371, 1376; *Tomislav Maričević* (2), Gimnazija Požega, Požega, 1371, 1372, 1376; *Saša Romić* (1), Gimnazija Požega, Požega, 1371; *Vanja Ubović* (2), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 1371, 1372.

Nagradni natječaj br. 182

Nađite brojeve x i y tako da vrijedi

$$\binom{7}{5}+\binom{10}{1}\binom{7}{4}+\binom{10}{2}\binom{7}{3}+\binom{10}{3}\binom{7}{2}+\binom{10}{4}\binom{7}{1}+\binom{10}{5}=\binom{x}{y}.$$

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko–fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

ISPRAVAK



U MFL-u br. 4/ 228 na zadnjoj strani omota je pogreškom otisnuta kriva slika OTONA KUČERE. Donosimo ispravnu sliku.

MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL)
za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine.

Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i
HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2007./2008. je 60 kn, pojedini broj stoji 15 kn.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)

Adresa lista je:
"Matematičko–fizički list, Bijenička 32, 10001 Zagreb, tel. (01) 4833-891, fax 4683-535.
Uplate na žiro račun:
Hrvatsko fizikalno društvo, Zagreb,
br. 2360000-1101301202 (kn),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)-kopiju uplatnice ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http://www.math.hr/mfl, e-mail: mfl@hfd.hr

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom:
Element, Zagreb, Menčetićeva 2

Tisak:
Tiskara Zelina d.d., Sv. Ivan Zelina, Ul. K. Krizmanić 1
Naklada ovog broja 3000 primjeraka

Slika na naslovnici: . . . *mladi Tesla s krova* – scena iz predstave "Nikola Tesla" OŠ "Jakšić" iz Jakšića.

SADRŽAJ

Dragi čitatelji!

Prošle godine je Zvonimir Janko, naš svjetski poznat matematičar, rođen u Bjelovaru, na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu proslavio 75-obljetnicu života. Istovremeno njegov otac je proslavio 100-ti rođendan. U časopisu American Mathematical Monthly, 1973. g. objavljena je pjesma, koju ovdje donosimo, a u kojoj se dvaput spominje ime našeg matematičara. O njemu ćemo zasigurno još pisati.

U geometriji je poznat Apolonijev problem u kojem treba konstruirati kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice. O tome imamo prilog Zvonka Čerina, redovitog profesora na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu. Od svima poznate formule za površinu trokuta, do volumena fulerena postepeno nas, na vrlo zanimljiv način, uvodi Darko Veljan s istog fakulteta. Objavljujemo i treći nastavak prijevoda Uvoda poznate knjige Williama Fellera iz teorije vjerojatnosti, studentice FER-a, Maje Sekulić, koji je doista mali i jednostavan uvod u ovu granu matematike.

Mnogo puta smo promatrali valove na moru, valovi se pojavljuju i kod televizijskog prijenosa s Mjeseca, na ultrazvuku možemo vidjeti srce nerođene bebe kako kuca u majčinoj utrobi, i još na mnogim drugim primjerima srećemo valove. Hrvoje Buljan, docent s Fizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu, upoznaje nas s valovima samotnjacima, nelinearnom valnom pojavom otkrivenom davne 1834. g.

U prilogu iz astronomije, asistent za astrofiziku Fizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu, Ettore Tamajo, piše o fizici dvojnih zvijezda koje su daleko složenije od jednostrukih zvijezda.

Zimska škola fizike, četvrta po redu, organizirana je na Odjelu za fiziku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Interes i oduševljenje polaznika ovom školom prikazano je slikama na naslovnici lista i na drugoj i trećoj strani omota lista.

Uz prilog *Iz svijeta znanosti*, Termoelektrične silicijeve nanožice, te prilogom s državnog natjecanja iz fizike održanog prošle godine, upoznavanjem s novim knjigama iz matematike za učenike i nastavnike, zatim sa zadacima s prijemnog ispita na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu 2007. g., na zadnjoj strani omota prisjetili smo se našeg matematičara i astronoma Radovana Vernića povodom 50-godišnjice smrti.

Uredništvo lista



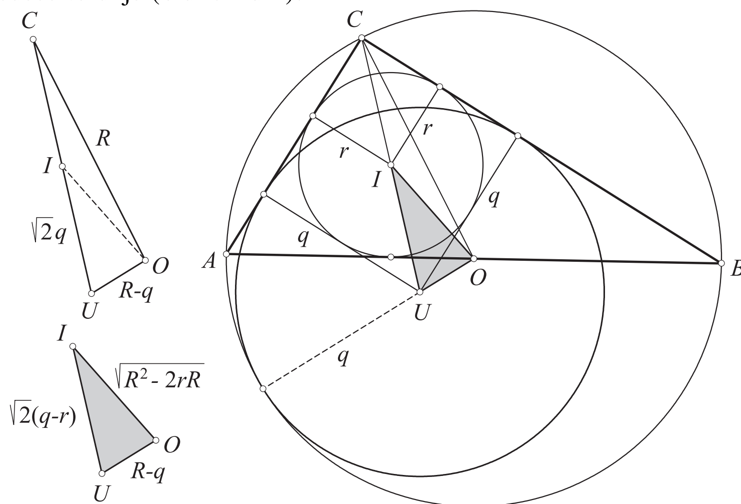
Neki slučajevi Apolonijevog problema

Zvonko Čerin[1], *Zagreb*

Apolonijev problem traži kružnice koje dodiruju tri zadane kružnice. Jer pri tome pravce smatramo isto kružnicama vidimo da je potraga za kružnicom koja dodiruje dva pravca stranica trokuta i njegovu opisanu kružnicu zapravo poseban slučaj Apolonijevog problema. U ovom članku prvo razmatramo slučaj kada je promatrani trokut pravokutan jer se tada tražena kružnica za pravce kateta lagano odredi budući da je u homotetiji s upisanom i pripisanom kružnicom (vrha pravog kuta). Poslije se pokazuje da homotetija igra ključnu ulogu i u slučaju bilo kakvog trokuta. Iz oblika koeficijenta te homotetije može se zaključiti da je trokut pravokutan ako jedna od kružnica ima polumjer jednak promjeru upisane kružnice. Na kraju se opisuju dva načina konstrukcija tih kružnica.

Rješenje Muminagića i Nykøbinga

U članku "En cirkel i den retvinklede trekant" na 849. stranici danskog časopisa Matematik Magasinet iz prosinca 2006. godine A. Muminagić i F. Nykøbing opisuju dokaz sljedeće tvrdnje (vidi sliku 1):



Slika 1. Muminagić i Nykøbing dokazuju relaciju $q = 2\,r$ primjenom teorema o kosinusu kuta pri vrhu U u dva izdvojena trokuta.

[1] Autor je redoviti profesor na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Teorem 1. *Polumjer kružnice koja dotiče iznutra opisanu kružnicu i oba pravca kateta pravokutnog trokuta jednak je promjeru njegove upisane kružnice.*

Njihovo rješenje koristi ne baš trivijalnu činjenicu (tzv. Eulerov teorem) da je u svakom trokutu udaljenost središta upisane i opisane kružnice jednaka $\sqrt{R^2 - 2\,r\,R}$, gdje su r i R polumjeri tih kružnica. Dakle, uz oznake na slici 1, znamo duljine stranica trokuta IOU i COU pa primjenom teorema o kosinusu kuta pri vrhu U možemo odmah pisati

$$\cos U = \frac{2(q-r)^2 + (R-q)^2 - R^2 + 2\,r\,R}{2\sqrt{2}(q-r)(R-q)} = \frac{2q^2 + (R-q)^2 - R^2}{2\sqrt{2}q(R-q)}.$$

Oduzmemo li drugi razlomak od prvog, poslije sređivanja dobijemo

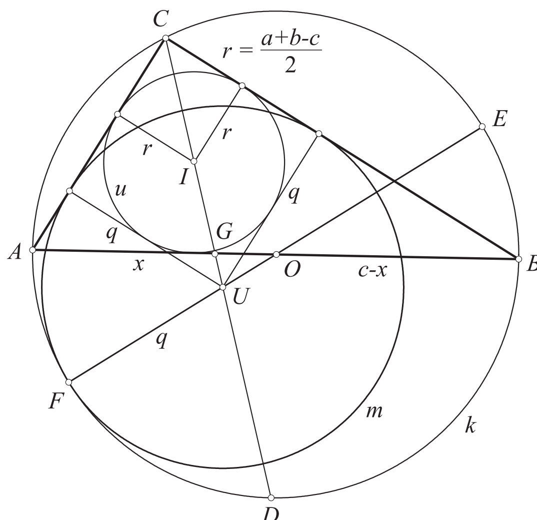
$$\frac{\sqrt{2}r\,(2\,r-q)}{4\,(q-r)\,(R-q)}.$$

Iz toga zaključujemo da je doista $q = 2\,r$.

Dokaz teorema 1 potencijom točke

Sada ćemo opisati drugi geometrijski dokaz teorema 1 koji ne koristi Eulerov teorem već se zasniva na dvostrukoj primjeni teorema o potenciji točke u unutrašnjosti kružnice (vidi [2, str. 17]).

Neka simetrala CI pravog kuta siječe hipotenuzu AB u točki G a opisanu kružnicu k (pored točke C još) u točki D (vidi sliku 2). Uvedimo oznake $|CD| = d$, $|CG| = g$ i $|AG| = x$. Neka kružnica m dotiče kružnicu k u točki F i neka je E njoj antipodalna točka u odnosu na kružnicu k.



Slika 2. Dokaz relacije $q = 2\,r$ primjenom teorema o potenciji na točke G i U.

Iz teorema o potenciji točke U (za tetive $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$) imamo

$$q(2R-q)=\sqrt{2}\,q(d-\sqrt{2}\,q),$$

što daje $d=\dfrac{2R+q}{\sqrt{2}}$. S druge strane, teorem o potenciji točke G (za tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$) povlači $x(c-x)=g(d-g)$ što daje $d=g+\dfrac{x(c-x)}{g}$. Izjednačavanjem ovih izraza za d možemo izračunati q jer se x i g lagano dobiju istovremeno primjenom teorema o kosinusu polovica pravog kuta u trokutima AGC i GCB.

I doista, iz prvog trokuta slijedi

$$x^2=b^2+g^2-\sqrt{2}\,b\,g, \tag{1}$$

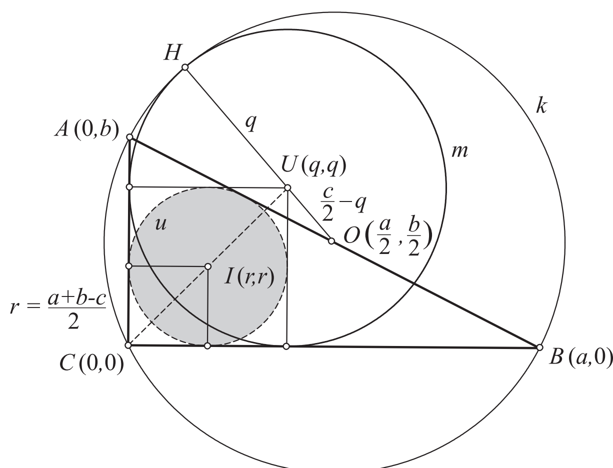
a iz drugog imamo

$$(c-x)^2=a^2+g^2-\sqrt{2}\,a\,g. \tag{2}$$

U razlici $(2)-(1)$ kvadratni članovi se dokidaju pa slijedi $x=\dfrac{2\,b^2+\sqrt{2}g(a-b)}{2\,c}$. Uvrstimo li to u razliku lijeve i desne strane jednadžbe (1) zaključujemo $g=\dfrac{\sqrt{2}\,a\,b}{a+b}$. Zato je $x=\dfrac{b\,c}{a+b}$ i $q=a+b-c=2\,r$. U tim računima više puta treba primjeniti Pitagorinu relaciju $c^2=a^2+b^2$.

Najlakši dokaz analitičkom geometrijom

Daleko jednostavniji dokaz teorema 1 možemo dobiti primjenom analitičke geometrije. Treba samo lukavo postaviti pravokutni trokut u pravokutni koordinatni sustav i znati kako se računa udaljenost dvije točke.



Slika 3. Dokaz teorema 1 analitičkom geometrijom.

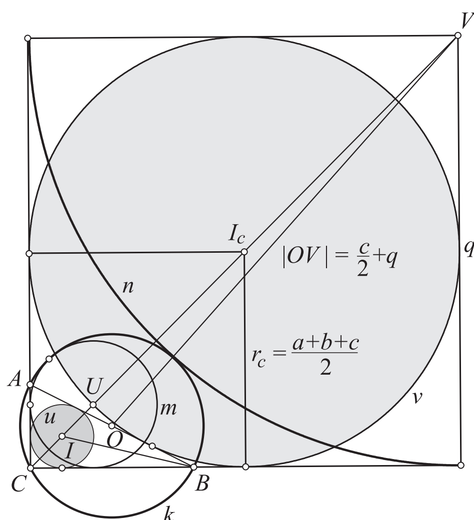
Prema oznakama na slici 3, udaljenost točaka O i U (središta opisane kružnice k i središta tražene kružnice m) mora biti jednaka $\frac{c}{2} - q$ (razlici njihovih polumjera). Dakle,

$$\left(\frac{c}{2} - q\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - q\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - q\right)^2$$

što je ekvivalentno s $q(q - a - b + c) = 0$. Zato je $q = a + b - c = 2r$, jer $q = 0$ vodi na trivijalno rješenje (koje je matematički potpuno prihvatljivo ako točku smatramo kružnicom ništičnog polumjera).

Slučaj dodirivanja izvana

Velika prednost prethodnog rješenja analitičkom geometrijom je što njega možemo lagano prilagoditi slučaju kada tražena kružnica dodiruje izvana opisanu kružnicu i pravce kateta (vidi sliku 4).



Slika 4. Kružnice m i n koje dodiruju pravce kateta i iznutra i izvana opisanu kružnicu k.

Udaljenost točaka O i V (središta opisane kružnice k i središta tražene kružnice n) mora biti jednaka $\frac{c}{2} + q$ (zbroju njihovih polumjera). Dakle,

$$\left(\frac{c}{2} + q\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - q\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - q\right)^2$$

što je ekvivalentno s $q(q - a - b - c) = 0$. Zato je $q = a + b + c = 2r_c$ (tj. promjer pripisane kružnice v pridružene vrhu C pravog kuta).

Prema tome dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 2. *Polumjer kružnice koja dotiče izvana opisanu kružnicu i oba pravca kateta pravokutnog trokuta jednak je promjeru pripisane kružnice hipotenuze.*

Poboljšanje teorema 1 i 2

Iako teoremi 1 i 2 samo opisuju koliki su polumjeri kružnica m odnosno n iz našeg dokaza analitičkom geometrijom jasno je da vrijedi sljedeće poboljšanje tih teorema koje mnogo preciznije određuje položaj tih kružnica.

Teorem 3. *Neka trokut ABC ima pravi kut u vrhu C, u njegova upisana a v pripisana kružnica nasuprot vrha C. Neka je $h = h(C, 2)$ homotetija ravnine sa središtem u točki C i koeficijentom 2. Onda kružnica $m = h(u)$ dotiče iznutra opisanu kružnicu k trokuta ABC i pravce AC i BC dok kružnica $n = h(v)$ dotiče izvana opisanu kružnicu k i pravce AC i BC.*

Opći slučaj

Sada se postavlja prirodno pitanje kako za trokut ABC s pravim kutom u vrhu C odrediti četiri kružnice analogne kružnicama m i n koje odgovaraju vrhovima A i B ili još općenitije pitanje kako opisati te kružnice za bilo kakav trokut ABC (bez ikakvih pretpostavki o njegovim kutovima). Iznenađujuće jednostavan odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem 4. *Neka je u upisana kružnica trokuta ABC a v njemu pripisana kružnica nasuprot vrha A. Neka je $h = h(A, \lambda)$ homotetija ravnine sa središtem u točki A i koeficijentom $\lambda = \dfrac{2}{1 + \cos A}$. Onda kružnica $m = h(u)$ dotiče iznutra opisanu kružnicu k trokuta ABC i pravce AB i AC dok kružnica $n = h(v)$ dotiče izvana opisanu kružnicu k i pravce AB i AC.*

U dokazu analitičkom geometrijom, odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da je $A(0, 0)$, $B(r(f+g), 0)$ i $C\left(\dfrac{(f^2-1)\,g\,r}{f\,g-1}, \dfrac{2f\,g\,r}{f\,g-1}\right)$. Parametri f i g su kotangensi polovica kutova A i B dok je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

Prema univerzalnoj trigonometrijskoj substituciji vrijedi

$$\cos A = \frac{1 - \left(\tan \dfrac{A}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \dfrac{A}{2}\right)^2} = \frac{1 - \dfrac{1}{f^2}}{1 + \dfrac{1}{f^2}} = \frac{f^2 - 1}{f^2 + 1}.$$

Zato je $\lambda = \dfrac{1+f^2}{f^2}$. Budući da središte I upisane kružnice ima koordinate $(f\,r, r)$, slijedi da točka $U = h(I)$ ima koordinate $\left(\dfrac{(1+f^2)\,r}{f}, \dfrac{(1+f^2)\,r}{f^2}\right)$. Lagano se provjeri da je točka $O\left(\dfrac{(f+g)\,r}{2}, \dfrac{(g+f+fg-1)\,(f+g-f\,g+1)\,r}{fg-1}\right)$ udaljena od

sva tri vrha A, B i C za istu vrijednost $R = \dfrac{r(1+g^2)(1+f^2)}{4(f\,g-1)}$. I na kraju, jer je $|OU|^2 = (R - \lambda\, r)^2$, zaključujemo da kružnica $m = h(u)$ doista dira iznutra opisanu kružnicu k trokuta ABC. Ona očito dira i pravce AB i AC jer točka U leži na simetrali kuta A (tj. na pravcu AI).

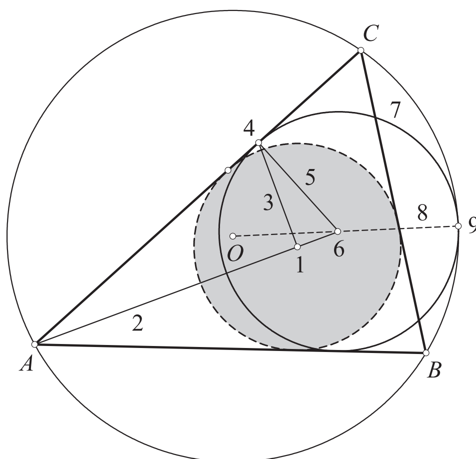
Za središte $I_a\left(\dfrac{(f+g)\,grf}{f\,g-1}, \dfrac{rg\,(f+g)}{f\,g-1}\right)$ pripisane kružnice nasuprot vrha A čiji polumjer je $r_a = \dfrac{rg\,(f+g)}{f\,g-1}$ vrijedi isti račun samo što je završna relacija jednaka $|OV|^2 = (R + \lambda\, r_a)^2$.

Neke posljedice

Budući da je $\lambda = \dfrac{2}{1+\cos A} = 2$ onda i samo onda ako je $\cos A = 0$ (tj. onda i samo onda ako je kut A pravi), vidimo da teorem 4 povlači da obrati teorema 1 i 2 također vrijede. Isto tako možemo karakterizirati trokute koji imaju u nekom vrhu kut od npr. 60° na sljedeći način.

Korolar 1. *Kut A u trokutu ABC jednak je 60° onda i samo onda ako je polumjer kružnice koja dotiče iznutra opisanu kružnicu k trokuta ABC i pravce AB i AC jednak $\frac{4}{3}$ polumjera njegove upisane kružnice.*

Jednostavne konstrukcije kružnica m i n

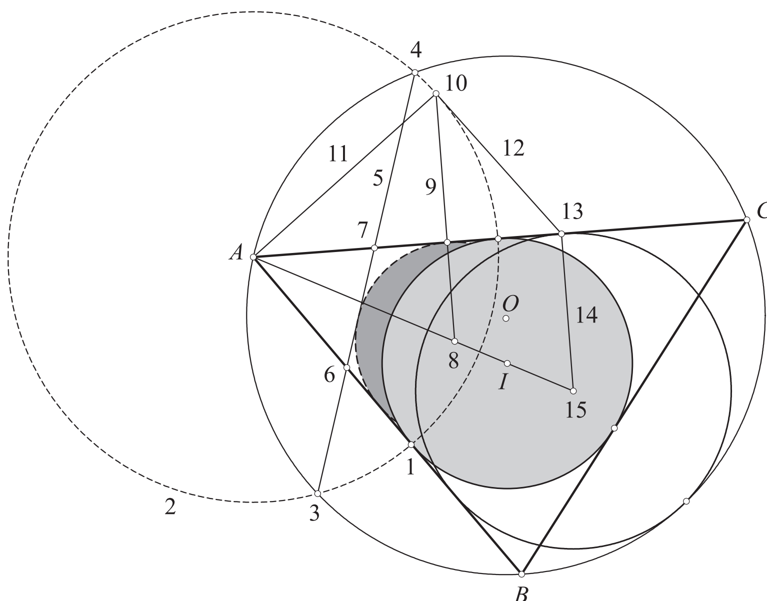


Slika 5. Konstrukcija kružnice m nasuprot vrha A u bilo kakvom trokutu ABC.

Na slici 5 prikazana je jednostavna konstrukcija kružnice m za vrh A. Prvo se odredi središte upisane kružnice 1 pa se ono spoji s točkom A. Na tu spojnicu 2 se u središtu upisane kružnice 1 podigne okomica 3 koja siječe pravac AC u točki 4. Okomica 5 na pravac AC u točki 4 siječe simetralu kuta A u središtu 6 tražene kružnice m. Njen polumjer je dužina $\overline{46}$ a točka 9, u kojoj iznutra dotiče opisanu kružnicu, dobiva se kao presjek s opisanom kružnicom spojnice središta O i točke 6. Konstrukcija kružnice n je vrlo slična i kreće od središta pripisane kružnice nasuprot vrha A umjesto središta upisane kružnice.

Konstrukcije kružnica m i n inverzijom

Jedna od učinkovitih metoda rješavanja Apolonijevog problema je primjena inverzije u odnosu na pogodno odabranu kružnicu (vidi [2, str. 188]).



Slika 6. Konstrukcija središta kružnice m inverzijom.

Na slici 6 prikazana je dosta složena konstrukcija središta kružnice m koja ima 15 koraka. Prvo se odredi točka u kojoj upisana kružnica dodiruje stranicu AB. Inverzija se provodi u odnosu na kružnicu sa središtem u točki A kroz tu dodirnu točku. Pravac 5 kroz točke 3 i 4 presjeka kružnice inverzije s opisanom kružnicom siječe pravce AB i AC u točkama 6 i 7. Tražena kružnica m je slika pripisane kružnice nasuprot vrha A trokuta $A67$ u toj inverziji.

Posljednja slika 7 prikazuje analognu konstrukciju središta kružnice n koja isto ima 15 koraka. Razlika je jedino u tome što je tražena kružnica n slika upisane kružnice trokuta $A67$ u istoj inverziji.

Slika 7. *Konstrukcija središta kružnice n inverzijom.*

Zaključak

Što smo sve mogli naučiti u ovom članku? Kao prvo, da ako neka tvrdnja (teorem 1) ima složeni dokaz poput rješenja Muminagića i Nykøbinga onda sigurno postoji još zamršeniji argument poput našeg s potencijom točke. Kao drugo, da ponekad metoda analitičke geometrije daje jednostavnije dokaze od čisto geometrijskih i da uvijek treba težiti prema što je moguće jednostavnijim argumentima jer nam oni obično pružaju najviše uvida u srž problema. Kao treće, da uvijek treba ići prema što je moguće većoj općenitosti jer i to obično daje najviše koristi i zadovoljstva.

Literatura

[1] A. Muminagić i F. Nykøbing, *En cirkel i den retvinklede trekant*, Matematik Magasinet **31** (2006), 849.

[2] Dominik Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb 1994.

⋆ ⋆ ⋆

Matematika je naprava koja kavu pretvara u teoreme.

Paul Erdős

Površina trokuta, četverokuta, peterokuta i volumen fulerena

Darko Veljan, Zagreb

Uvod

Nekome se može učiniti da jednom kada znamo izračunati površinu trokuta, problem računanja površine nekog poligona svodi se na zbroj površina trokuta na koje je poligon isjeckan. No, nije baš tako. Odgovor uvelike ovisi o tome koje podatke o poligonu znamo. Evo, primjerice, jednog zadataka.

Zadatak 1. Izračunajte površinu P (konveksnog) četverokuta ako su mu duljine stranica redom 5, 6, 7, 8, a produkt duljina dijagonala jednak 85. (*Odgovor*: $P = 42$.)

Navedimo uvodno još dva tipična zadatka s kakvim ćemo se baviti u ovom članku.

Zadatak 2. Zamislimo da obilazimo oko zidova zgrade oblika konveksnog peterokuta (ili "pentagona"). Pretpostavimo da smo nekako saznali da su tlocrtne površine trokuta s tri uzastopna vrha redom 10, 20, 30, 40 i 40 m^2. Kolika je tlocrtna površina P "pentagona"? (*Odgovor*: $P = 100\ \mathrm{m}^2$.)

Zadatak 3. Odredite oplošje O i volumen V pravilnog dodekaedra brida duljine 1. (*Odgovor*: $O \approx 20.6457$, $V \approx 7.6631$.)

Napomenimo da su pitanja računanja površina vrlo stara i netrivijalna. Uostalom, tek je Newton u 17. st. s otkrićem integralnog računa dao principijelan odgovor na pitanje: "Kako izračunati površinu?" A o volumenu da i ne pričamo!

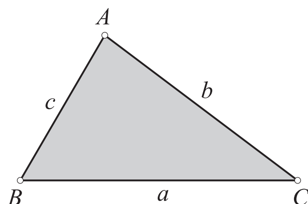
Heronova, Bretschneiderova i Brahmaguptina formula

Počnimo s poznatom Heronovom formulom za računanje površine $\triangle$ trokuta pomoću duljina stranica a, b, c. Iako se ta formula pripisuje Heronu iz Aleksandrije (iz 1. st. pr. Kr.), pouzdano se zna da ju je poznavao i Arhimed (tri stoljeća ranije).

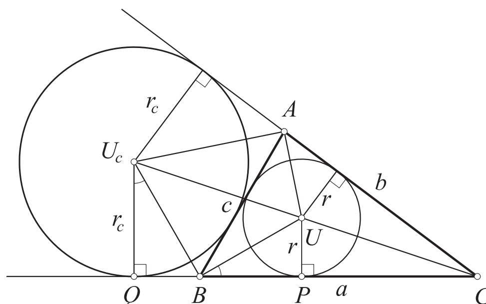
Heronova formula

Površinu $\triangle = p(\triangle ABC)$ trokuta (sl. 1) čije su duljine stranica a, b, c i poluopseg $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ računamo ovako:

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$



Slika 1.



Slika 2.

Dokaz Heronove formule. Evo jednog kratkog i lijepog dokaza. Označimo s r polumjer upisane, a s r_c polumjer pripisane kružnice trokuta, kao na sl. 2, sa središtima redom U i U_c. Tada je očito

$$\triangle = p(\triangle BCU) + p(\triangle CAU) + p(\triangle ABU) = \frac{1}{2}(ar + br + cr) = rs.$$

Slično,

$$\triangle = p(\triangle BCU_c) + p(\triangle CAU_c) - p(\triangle ABU_c) = \frac{1}{2}(ar_c + br_c - cr_c) = r_c(s - c).$$

Dakle, $\triangle^2 = rr_cs(s-c)$. Neka su P i Q ortogonalne projekcije od U i U_c na BC. Tada je (kutovi s okomitim kracima!): $\triangle PBU \sim \triangle QU_cB$. Lako se vidi (uvjerite se sami u to!) da je $|BP| = s - b$ i $|BQ| = s - a$. Zato je $r : (s-b) = (s-a) : r_c$, pa je $rr_c = (s-a)(s-b)$. Uvrštavanjem dobivamo Heronovu formulu

$$\triangle^2 = rr_cs(s-c) = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

□

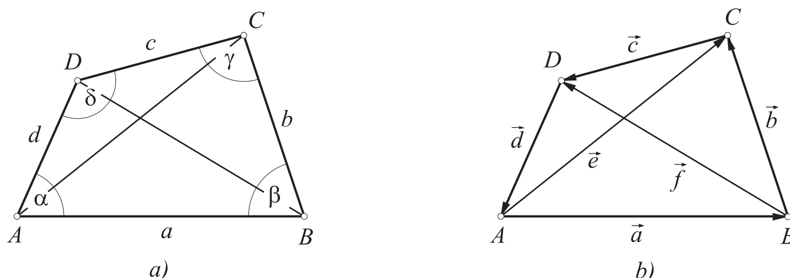
Napomena 1. Pokazuje se ([1]) da je Heronova formula ekvivalentna Pitagorinom poučku. Danas se znade preko 400 dokaza Pitagore, pa stoga ima i preko 400 dokaza Heronove formule. Neke od njih vidi u [2]. Evo još dva njezina (ekvivalentna) zapisa bez korijena (izvedite ih!):

$$(4\triangle)^2 = 2[(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2] - (a^4 + b^4 + c^4),$$
$$(4\triangle)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Ako je trokut pravokutan onda je $a^2 + b^2 = c^2$ i $4\triangle = 2ab$, pa možemo reći da "Heron mjeri otklon od pravokutnosti".

Bretschneiderova, Brahmaguptina i još neke formule za četverokut

Sada ćemo izvesti formule za površinu četverokuta. Neka je $ABCD$ (konveksan) četverokut s duljinama stranica a, b, c, d i dijagonala e, f, te unutarnjim kutovima α, β, γ, δ, kao na sl. 3a). Izvest ćemo nekoliko formula za površinu $\square = p(ABCD)$ četverokuta $ABCD$ i posebno za tetivni četverokut.



Slika 3.

Bretschneiderova formula (oko 1850. g.):

$$(4\square)^2 = (2ef)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \qquad (*)$$

Dokaz. Vektorizirajmo stranice i dijagonale četverokuta kao na sl. 3b). Tada je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$, $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{b}+\vec{c}$. Znamo da je $2\square = |\vec{e}\times\vec{f}|$. Prisjetimo se da je vektorski produkt $\vec{e}\times\vec{f}$ vektor okomit na $\vec{e}$ i $\vec{f}$, modula jednakog površini paralelograma razapetog s $\vec{e}$ i $\vec{f}$, a vektori $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{e}\times\vec{f}$ čine desni sustav; o detaljima vidi u [2]. Tada imamo (rabeći osnovna svojstva vektorskog i skalarnog produkta):

$$4\square^2 = (\vec{e}\times\vec{f})\cdot(\vec{e}\times\vec{f}) = (\vec{e}\vec{e})\cdot(\vec{f}\vec{f}) - (\vec{e}\vec{f})^2 = e^2f^2 - (\vec{e}\vec{f})^2.$$

Izračunajmo sada skalarni produkt $\vec{e}\vec{f}$. Imamo,

$$\begin{aligned}2(\vec{e}\vec{f}) &= 2(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c}) = 2\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) - 2\vec{b}(\vec{a}+\vec{d})\\ &= 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{b}\vec{d} = (\vec{a}+\vec{c})^2 - \vec{a}^2 - \vec{c}^2 - (\vec{b}+\vec{d})^2 + \vec{b}^2 + \vec{d}^2\\ &= -a^2 - c^2 + b^2 + d^2.\end{aligned}$$

Uvrstimo li ovo u gornju formulu za $4\square^2$, dobivamo Bretschneiderovu formulu. $\square$

Napomena 2. Riječima, Bretschneiderova formula glasi ovako. Kvadrat četverostruke površine četverokuta je kvadrat dvostrukog produkta dijagonala, umanjen za kvadrat ciklički alterniranog zbroja kvadrata njegovih stranica. Uočimo da se Bretschneiderova formula svodi na Heronovu kada četverokut degenerira u trokut. Naime, ako je npr. na sl. 3 a) jedna stranica jednaka nuli, npr. $d = 0$, onda je $e = c$, $f = a$, pa Bretschneiderova formula prelazi u

$$(4\square)^2 = (2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2,$$

a to je Heronova formula u obliku posljednje formule iz napomene 1.

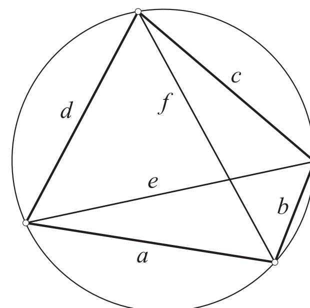
Ako je četverokut deltoid, tj. ima okomite dijagonale, onda je $2\square = ef$. Stoga Bretschneider mjeri otklon od "deltoidnosti".

Sada pogledajmo na što se svodi Bretschneiderova formula kada je četverokut tetivni. U tu svrhu prvo dokažimo sljedeći poučak.

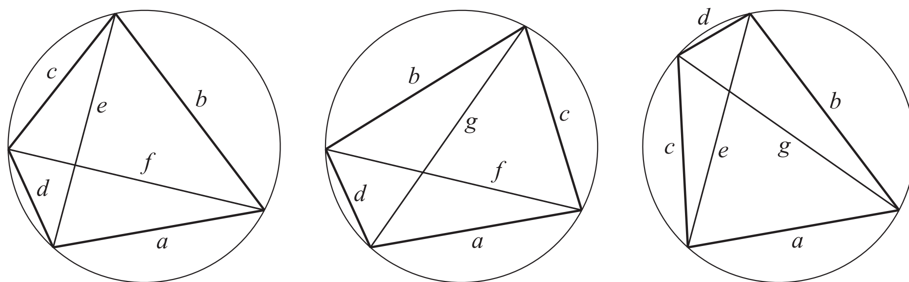
Ptolemejev[2] **poučak.** U tetivnom je četverokutu umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica, ili prema oznakama na sl. 4:

$$ef = ac + bd. \qquad (**)$$

Dokaz. Promotrimo tri različita tetivna četverokuta sa stranicama a, b, c, d s opsegom $2s$, polumjerom opisane kružnice R i površinom P. Neka su e, f, g duljine dijagonala kao na sl. 5. Koristimo poznatu formulu za površinu trokuta (sa sl. 1): $4R\triangle = abc$. (*Dokaz.* Sličnost $\triangle ABA' \sim \triangle AA_1C$ povlači $c : v_a = 2R : b$, pa iz $2\triangle = av_a$ slijedi $4R\triangle = abc$, pritom je A' nožište visine iz A, a $\overline{AA_1}$ promjer opisane kružnice.) Primijenimo tu formulu na šest trokuta podijeljenih dijagonalama e, f, g i dobivene rezultate (po dva za svaku dijagonalu) zbrojimo.



Slika 4.



Slika 5.

Dobivamo

$$4RP = (ab + cd)e = (ad + bc)f = (ac + bd)g.$$

Dijeljenjem s efg slijedi

$$\frac{ab + cd}{fg} = \frac{ad + bc}{eg} = \frac{ac + bd}{ef} = \frac{4RP}{efg} := k,$$

gdje je k neka konstanta. No, za $d = 0$ je $e = c$, $f = a$, $g = b$, pa je $k = 1$. Odavde slijedi Ptolomejev poučak. □

Uvrstimo li Ptolemejevu formulu $(**)$ u Bretschneiderovu $(*)$, nakon malo sređivanja, dobijemo poznatu **Brahmaguptinu formulu** iz 7. stoljeća za površinu □ tetivnog četverokuta s duljinama stranicama a, b, c, d i poluopsegom s:

$$\square = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Uočimo da je $(4RP)^2 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$, te $e^2 = \dfrac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$.

[2] Klaudije Ptolemej (oko 90. – oko 168.) starogrčki je matematičar, astronom i geograf a djelovao je u Aleksandriji. Daleki je potomak Ptolemeja I., generala vojske Aleksandra Velikog i kasnije egipatskog kralja kojeg je Euklid podučavao geometriju. Nakon što je postao nestrpljiv upitao je Euklida ima li neki brži i jednostavniji način da mu objašnjava geometriju, na što mu je ovaj odgovorio: "Nema kraljevskog puta u geometriju."

I konačno, formula za radijus $R^2 = \dfrac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$. Napomenimo da se površina $\square$ bilo kojeg četverokuta može, uz oznake kao na sl. 3 a), izraziti i ovako

$$\square = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}. \qquad (+)$$

Dokaz započinje ovako. Imamo $2\square = ad\sin\alpha + bc\sin\gamma$. Sada se uporabi kosinusov poučak: $a^2+d^2-2ad\cos\alpha = b^2+c^2-2bc\cos\gamma$. Dalje nastavite sami ili pogledajte [2]. Uočite da se $(*)$ može i ovako zapisati

$$\square = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)}. \qquad (++)$$

Usporedimo li formule $(*)$ i $(+)$ za površinu $\square$ četverokuta, lako se dobiva tzv. **kosinusov poučak za četverokut** kojim se izražava produkt dijagonala

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma). \qquad (+++)$$

Posebno, ako je četverokut tetivni, što je ekvivalentno s $\alpha+\gamma=\pi$, iz $(+++)$ dobivamo još jednom Ptolemejev poučak, kao i općenito $ef \le ac+bd$.

Konačno evo još jedne lijepe formule za površinu $\square$ četverokuta (uz standardne oznake sa sl. 3 a)):

$$4\square = \frac{(a+b+c+d)^2}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}} - \frac{(a-b+c-d)^2}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\delta}{2}}.$$

Ova se formula zove *"Russian killer"* (vidi [3]), a razlog za njegovo ubojito ime je jer je bio zadan kao zadatak na jednoj ruskoj matematičkoj olimpijadi i tada je "poubijao" skoro sve natjecatelje.

Evo ukratko ideje dokaza. Uzmimo $e = |AC| = 1$. Označimo $\theta_1 = \sphericalangle CAD$, $\theta_2 = \sphericalangle ACD$, $\theta_3 = \sphericalangle ACB$, $\theta_4 = \sphericalangle CAB$ i kompleksne brojeve $z_k = e^{i\theta_k}$, $k = 1,2,3,4$. Tada je

$$\sin\theta_k = -\frac{i}{2}\left(e^{i\theta_k} - \frac{1}{e^{i\theta_k}}\right) = -\frac{i}{2}\left(z_k - \frac{1}{z_k}\right),$$

$$\sin\beta = \sin(\theta_3+\theta_4) = -i\frac{(z_3z_4)^2-1}{2z_3z_4},$$

$$\sin\delta = \sin(\theta_1+\theta_2) = -i\frac{(z_1z_2)^2-1}{2z_1z_2}.$$

Iz poučka o sinusima je $a = \dfrac{\sin\theta_3}{\sin\beta} = \dfrac{(z_3^2-1)z_4}{(z_3z_4)^2-1}$, i slične izraze dobivamo za b, c, d. Nadalje,

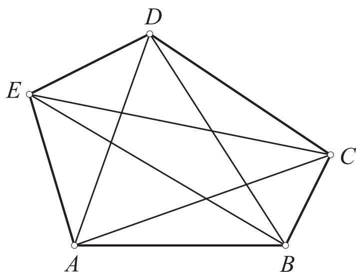
$$e^{\frac{i\alpha}{2}} = e^{\frac{i(\theta_1+\theta_4)}{2}} = \sqrt{z_1z_2}, \qquad e^{\frac{i\beta}{2}} = e^{\frac{i(\pi-\theta_3-\theta_4)}{2}} = \frac{i}{\sqrt{z_3z_4}},$$

$$e^{\frac{i\gamma}{2}} = e^{\frac{i(\theta_2+\theta_3)}{2}} = \sqrt{z_2z_3}, \qquad e^{\frac{i\delta}{2}} = e^{\frac{i(\pi-\theta_1-\theta_2)}{2}} = \frac{i}{\sqrt{z_1z_2}}.$$

Odavde dobivamo $\cot\dfrac{\alpha}{2} = i\dfrac{z_1z_4+1}{z_1z_4-1}$ i slične izraze za $\cot\dfrac{\beta}{2}$, $\cot\dfrac{\gamma}{2}$, $\cot\dfrac{\delta}{2}$, a iz $\tan\,\theta = \dfrac{1}{\cot\,\theta}$ izraze za $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ itd. Ako sada u formulu $2\square = d\sin\theta_1 + a\sin\theta_4$

uvrstimo gornje vrijednosti, kompjutorskom provjerom, koristeći npr. softverski paket Maple IX, možemo se brzo uvjeriti u ispravnost formule "*Russian killer*".

Gaussova, Robbinsova i još neke formule za peterokut



Slika 6.

Stoljećima su se ljudi bavili geometrijom trokuta i četverokuta. Sada ćemo ukratko prikazati neke netrivijalne činjenice iz geometrije peterokuta i ponešto šesterokuta. Započinjemo s Gaussovom formulom iz 1823. Neka je $ABCDE$ (konveksan) peterokut kao na sl. 6. Ova, začudno lijepa, jednostavna i pomalo zaboravljena formula računa površinu P peterokuta pomoću površina tzv. vršnih trokuta. *Vršni trokut* peterokuta je trokut s tri uzastopna vrha: $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$.

Označimo površinu vršnog trokuta $p(\triangle EAB)$ simbolom (A), površinu $p(\triangle ABC)$ simbolom $(B),\ldots$, površinu $p(\triangle DEA)$ simbolom (E). Formirajmo cikličke sume c_1 i c_2 ovako:

$$c_1 = (A) + (B) + (C) + (D) + (E),$$
$$c_2 = (A)(B) + (B)(C) + (C)(D) + (D)(E) + (E)(A).$$

Gaussova "pentagon formula". Površina P peterokuta zadovoljava sljedeću kvadratnu jednadžbu

$$P^2 - c_1 P + c_2 = 0. \qquad (\clubsuit)$$

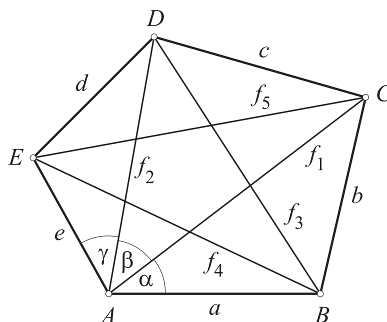
Dokaz. Prvo ćemo dokazati **Mongeovu formulu** koja veže površine svih šest trokutova koji imaju vrh A:

$$(B)(E) + (A)p(\triangle ACD) = p(\triangle ABD)p(\triangle ACE). \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

Napišimo sve površine u formuli $(\clubsuit\clubsuit)$ kao polovicu produkta dviju stranica i sinusa kuta među njima, kao na sl. 7. Tada je $2(B) = 2p(\triangle ABC) = af_1\sin\alpha$, $2(E) = ef_2\sin\gamma$, $2(A) = ae\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $2p(\triangle ACD) = f_1f_2\sin\beta$, $2p(\triangle ABD) = af_2\sin(\alpha+\beta)$, $2p(\triangle ACE) = ef_1\sin(\beta+\gamma)$. Uvrstimo li ovo u $(\clubsuit\clubsuit)$, nakon skraćivanja s $\frac{1}{2}aef_1f_2$, formula prelazi u identitet

$$\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$= \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma),$$

koji se lako provjeri pomoću adicijske formule za sinus. (Uočite da se u ovom obliku adicijske formule pojavljuje samo za sinus!)



Slika 7.

Sada dovršimo dokaz Gaussove formule. U Mongeovu formulu uvrstimo $p(\triangle ACD) = P - (B) - (E)$, $p(\triangle ABD) = P - (C) - (E)$ i $p(\triangle ACE) = P - (B) - (D)$. Nakon sređivanja dobivamo $(\clubsuit)$. $\square$

Napomenimo da je drugo rješenje od (♣) razlika površina originalnog i zvjezdastog peterokuta ("pentagrama" ili peterokrake zvijezde $ADBECA$).

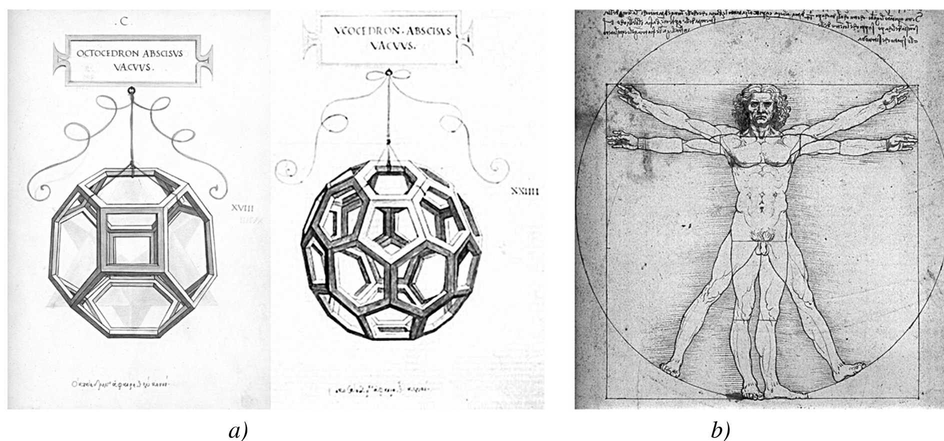
Posljedica. Ako svi vršni trokuti peterokuta $ABCDE$ imaju istu površinu jednaku k, onda je površina P peterokuta jednaka $P = \sqrt{5}\varphi k \approx 3.618k$, gdje je $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ tzv. **zlatni rez** (tj. pozitivno rješenje jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$).

Dokaz. Uvrstimo li u Gaussovu formulu (♣) $(A) = (B) = \ldots = (E) = k$, tvrdnja se dobiva rješavanjem kvadratne jednadžbe $P^2 - 5kP + 5k^2 = 0$. □

Odavde nije teško izvesti i poznatu formulu za površinu P pravilnog peterokuta duljine stranice a (učinite to sami):

$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \approx 1.72a^2.$$

Da zlatni rez $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$ ima duboke veze s pravilnim peterokutom, uočili su još starogrčki matematičari, mudraci i umjetnici, a toj su se temi vratili i renesansni mislioci. Naročito je to budilo maštu Leonarda da Vincija (15. st.) koji je zlatni rez nazvao **božanski omjer** ("De Divina Proportione"). Na sl. 8a) su njegovi crteži u knjizi Luce Paciolia. Znajući da se dijagonala i stranica pravilnog peterokuta nalaze u božanskom omjeru, Leonardo je osmislio čuvenu sliku (sl. 8b) na kojoj su tjeme čovjekove glave i vršci prstiju na ispruženim rukama i nogama vrhovi pravilnog peterokuta. A evo primjera iz prirode: u svakoj je košnici omjer brojeva pčela radilica i trutova 1.618. O mnogim drugim zanimljivim aspektima božanskog omjera laicima pokušava tumačiti Dan Brown u svjetskoj uspješnici [4].



a) *b)*

Slika 8.

Nakon ovog malog izleta u umjetnost, koji još jednom potvrđuje bliskost matematike i umjetnosti, vratimo se u našu "običnu matematiku".

Jasno je da površinu P peterokuta sa sl. 7 možemo dobiti zbrajanjem, rabeći Bretschneiderovu i Heronovu formulu, primjerice,

$$4P = \sqrt{(2f_2f_5)^2 - (c^2 - d^2 + e^2 - f_1^2)^2} + \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - f_1^2)^2}. \qquad (\heartsuit)$$

Drugi način je da zbrojimo površine trokuta rabeći Heronovu formulu:

$$\begin{aligned} 4P = &\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - f_1^2)^2} + \sqrt{(2f_1f_2)^2 - (f_1^2 + f_2^2 - c^2)^2} \\ &+ \sqrt{(2de)^2 - (d^2 + e^2 - f_2^2)^2}. \end{aligned} \qquad (\heartsuit\heartsuit)$$

Ali, eliminacija korijena u zbroju tri korijena je puno teža nego u zbroju dva korijena (pokušajte! – a tek četiri, pet ili šest korijena!). No, uočite da u $(\heartsuit)$ osim stranica rabimo tri dijagonale, a u $(\heartsuit\heartsuit)$ samo dvije.

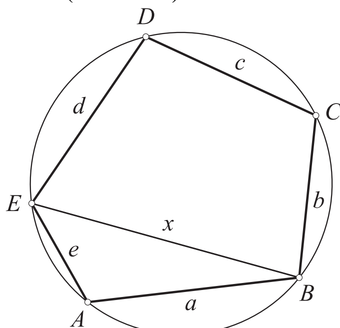
A kako dobiti površinu P tetivnog peterokuta samo pomoću duljina stranica, dakle analogon Brahmagupte (ili Herona)?

Odgovor na ovo, samo naoko, naivno pitanje nije lako dobiti. Prvi je to učinio D. Robbins 1995. g. (vidi [6]). Nedavno smo mi dali drugačiji i izravniji dokaz (vidi [7]). U dokazu se rabi kompjutorska algebra. Ideja je da se algebarski eliminiraju sve duljine dijagonala. Preostaje algebarska jednadžba 7. stupnja u kvadratu $(4P)^2$ površine peterokuta. Evo kako se najkraće može napisati Robbinsova formula. Neka su e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 elementarne simetrične funkcije kvadrata a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 duljina stranica tetivnog peterokuta, kao na sl. 9. Točnije, e_k je zbroj produkata od po k faktora. Dakle, $e_1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$, $e_2 = a^2b^2 + a^2c^2 + \ldots + d^2e^2$, $e_3 = a^2b^2c^2 + \ldots + c^2d^2e^2$, $e_4 = a^2b^2c^2d^2 + \ldots + b^2c^2d^2e^2$, $e_5 = a^2b^2c^2d^2e^2$. Dalje, označimo $H := (4P)^2 + e_1^2 - 4e_2$ (ovo je za “Heron”) i $B := H^2 - 64e_4$ (ovo je za “Brahmagupta”), te $H_1 := e_1H + 8e_3$. Tada imamo **Robbinsovu formulu**

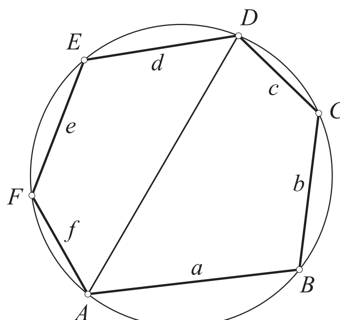
$$R := B^2[(4P)^2B + H_1^2] - 128e_5[16H_1^3 + 18(4P)^2H_1B + 2^7 3^3 e_5(4P)^4] = 0.$$

Uočimo da, ako tetivni peterokut degenerira u četverokut, tj. ako je npr. $e = 0$, onda je $e_5 = 0$ i Robbinsova se formula svodi na Brahmaguptinu $B = 0$. Slična formula može se dobiti za šesterokut, kao i za kvadrat radijusa R^2 opisane kružnice pomoću duljina stranica peterokuta (ili šesterokuta). I taj je rezultat jednadžba 7. stupnja, čiji se koeficijenti također mogu napisati pomoću elementarnih simetričnih funkcija od $a^2, \ldots, e^2$. Ali kako ta formula ima osam redaka, nećemo je navoditi (zainteresiranog čitatelja upućujemo na [7]).

No osnovna ideja dokaza Robbinsove formule je algebarska jednadžba 7. stupnja kojom se izražava duljina dijagonale x pomoću duljina $a, \ldots, e$ stranica tetivnog peterokuta (vidi sl. 9).



Slika 9.



Slika 10.

Jednadžba za dijagonalu x glasi ovako:

$$(x^2 - a^2 - e^2)^2(bx + cd)(cx + bd)(dx + bc) = (ae)^2[x^3 - (b^2 + c^2 + d^2)x - 2bcd]^2.$$

Ona se dobiva tako da se izjednači R^2 za $\triangle ABE$ pomoću stranica a, e, x, te za četverokut $BCDE$ pomoću stranica b, c, d, x. Robbinsova se formula dobiva eliminacijom x i R iz nekoliko jednadžbi ovakvog tipa (dakako rabeći kompjutorsku algebru).

Kombinacijom Gaussove i Robbinsove formule dobivamo, pomalo iznenađujuće, da je površina tetivnog peterokuta racionalna funkcija od kvadrata duljina stranica i površina vršnih trokutova peterokuta (jer u Robbinsa uvrstimo Gaussa: $P^2 = c_1P - c_2$).

Da izračunamo površinu $A = p(ABCDEF)$ tetivnog šesterokuta kao na sl. 10, razdijelimo ga dijagonalom duljine x, čime se šesterokut raspada na dva tetivna četverokuta. Izjednačavanjem R^2 iz oba četverokuta, dobivamo jednadžbu 7. stupnja za x pomoću stranica. Tada se, slično kao za peterokut i ovdje (uz neke trikove) kompjutorski dobiva jednadžba 14. stupnja za $(4R)^2$ i $(4A)^2$ pomoću kvadrata stranica.

Napomena 3. Nedavno je dokazano da i općenito za površinu A tetivnog n-terokuta postoji polinomska jednadžba za $(4A)^2$, čiji su koeficijenti simetrični polinomi kvadrata duljina stranica n-terokuta. Najmanji stupanj takvog polinoma je $\triangle_k$ za $n = 2k+1$, a $2\triangle_k$ za $n = 2k+2$, gdje je

$$\triangle_k = \frac{1}{2}\left[(2k+1)\binom{2k}{k} - 2^{2k}\right] = \sum_{i=0}^{k-1}(k-i)\binom{2k+1}{i},$$

a to je ukupni broj $(2k+1)$-terokuta upisanih u kružnicu (bilo konveksnih ili nekonveksnih). Dakle, $\triangle_1 = 1$, $\triangle_2 = 7$, $\triangle_3 = 38$, $\triangle_4 = 187, \ldots$.

Evo jedne zanimljive posljedice naše "geometrije peterokuta". Kao što znamo, iz zadanih veličina a, b, c možemo konstruirati trokut s tim duljinama stranica (dakako, ovdje mislimo na konstrukciju ravnalom i šestarom), pri čemu jedino mora biti ispunjen uvjet nejednakosti trokuta. Slična je stvar s tetivnim četverokutom. Iz a, b, c, d se može naći radijus R i konstruirati ga (vidi [2]). No, tetivni se peterokut sa zadanim duljinama stranica općenito ne može konstruirati. Razlog je u tome što kvadrat radijusa R (ili duljina dijagonale) zadovoljava ireducibilnu (nerastavljivu) jednadžbu sedmog stupnja, a takva se rješenja općenito ne mogu konstruirati (osim u nekim posebnim slučajevima).

Volumen fulerena

Evo i jedne izravne primjene naših rezultata. Navest ćemo je samo opisno i načelno, a odnosi se na računanje obujmova izvjesnih poliedara. Neka je P (konveksni) poliedar upisan u sferu zadanog radijusa R, čije su strane trokuti, četverokuti, peterokuti i šesterokuti. Pretpostavimo da su još jedino poznate duljine bridova poliedra, tj. skup $l = \{a_{ij}\}$ i kombinatorna struktura K poliedra (to samo znači da znamo koja je kojoj susjedna strana, njihovi oblici, brojevi, itd.). Kako izračunati obujam (volumen) $\mathrm{vol}(P)$ u terminima K, l i R? Jedan takav zanimljiv primjer je upisani pentagonalni dodekaedar (ne nužno pravilni) kojem se rub sastoji od 12 peterokuta i svaki od njih je, naravno, tetivni. Takvi poliedri javljaju se često u fizikalnoj kemiji i poznati su pod nazivom **fulereni**. Općenito, oni ne moraju biti upisani u sferu. Za njihovo su

otkriće H. Croto i dr. dobili Nobelovu nagradu za kemiju 1996. g. Najpoznatiji je tzv. "Buckminster fullerene", molekula C_{60} sa 60 ugljikovih atoma povezanih u strukturu nalik nogometnoj lopti (usp. sl. 8 a)) s 12 peterokuta i 20 šesterokuta, nazvanog po američkom inženjeru i arhitektu R. Buckminsteru Fulleru (1895.–1985.). Sa stanovišta fizikalne kemije, razumno je da su podaci dobiveni mjerenjima i jedino dostupni, a to su l i R, kao i kombinatorna struktura K koju dobivamo iz interatomnih i intermolekularnih kemijskih veza. Sada računanje $\mathrm{vol}(P)$ dobiva jasniji smisao. Prvo, pomoću stranica s Robbinsovom formulom izračunamo površinu B svake peterokutne strane. Zatim pomoću slične jednadžbe sedmog stupnja izračunamo radijus r opisane joj kružnice (vidi [7]). Iz Pitagorinog poučka dobivamo visinu $v = \sqrt{R^2 - r^2}$ piramide kojoj je središte opisane sfere vrh, a promatrani peterokut baza. Volumen te piramide je $\frac{1}{3}B \cdot v$. Ako je strana šesterokut, imamo poznate slične formule, a za trokute i četverokute uporabimo Heronovu i Brahmaguptinu formulu i formule za radijuse. I konačno, $\mathrm{vol}(P) = \frac{1}{3}\sum B \cdot v$, tj. volumen poliedra P dobivamo kao zbroj volumena tih piramida. Ovdje nam trebaju formule za radijus r opisane kružnice. Za trokut i tetivni četverokut smo ih već izveli. Za tetivni peterokut i šesterokut jednadžbe su 7. i 14. stupnja i dosta su složene (vidi [7]).

Naravno, površina (ili oplošje) fulerena P je jednaka zbroju $\sum B$ površina svih baza B. Ako fuleren nije upisan u sferu, onda pojedine površine računamo iz podataka koji su nam dostupni, pa ako možemo, rabeći Herona, Bretschneidera $(*)$, Gaussa $(\clubsuit)$ ili formulu $(\heartsuit)$ ili $(\heartsuit\heartsuit)$ itd. Bez dodatnh podataka volumen takvog poliedra ne možemo točno izračunati. Međutim, pomoću oplošja O možemo volumen V odozgo omeđiti pomoću sljedeće "izoperimetrijske nejednakosti" za konveksni poliedar s n strana:

$$\frac{O^3}{V^2} \geq 54(n-2)(4\sin^2\alpha_n - 1)\,\mathrm{tg}\ \alpha_n, \qquad \alpha_n = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{n}{n-2}.$$

Pritom se jednakost dostiže samo za pravilni tetraedar, kocku i dodekaedar. Izoperimetrijska nejednakost za n-terokut u ravnini veže opseg L i površinu P i glasi ovako:

$$\frac{L^2}{P} \geq 4n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n},$$

s jednakošću samo za pravilni n-terokut. (Zainteresirani čitatelj može dokaze naći u knjizi [8].) Ustvari, čini se da su fulereni u prirodi često nepravilni i da izgledaju poput kakvih krumpira.

Kažimo još da se postupak za računanje oplošja može u mnogim posebnim slučajevima znatno pojednostavniti. Takav je npr. slučaj afino pravilnih poliedara. To su afine slike pravilnih. Afino preslikavanje je bijekcija prostora koja preslikava ravnine na ravnine (stoga i pravce na pravce) i čuva djelišni omjer. Afino pravilni poligon je afina slika pravilnog. Tako je svaki trokut afino pravilni, a afino pravilni četverokuti su paralelogrami. Pokazuje se ([7]) da je peterokut afino pravilan ako i samo ako ima sve vršne trokute jednakih površina. Posljedica Gaussove formule $P = \sqrt{5}\varphi k$ je stoga formula za površinu afino pravilnog peterokuta. Slična se formula može dobiti i za afino pravilne šesterokute.

Pet točaka u ravnini posve određuje koniku (npr. elipsu) na kojoj leže. Ako još znamo njene parametre, npr. duljine poluosi i pet duljina bridova, znamo li tada i površinu peterokuta? Afinim vraćanjem s elipse na kružnicu Robbins (uz kompjutor itd.) ne daje zadovoljavajući odgovor.

Bilo kako bilo, vidimo da algoritam za nalaženje oplošja, a naročito volumene fulerena, zahtijeva prilično mnogo računanja, ali se katkad mogu numerički pojednostavniti. Sve u svemu, kao i uvijek, računanje volumena je težak posao!

Napomenimo na kraju da se mnoge formule koje smo ovdje spomenuli (ili i dokazali) mogu mehanički (koordinatno) dokazati ili bolje reći provjeriti kompjutorskim simboličkim računanjem. O tome se može naći u [9].

A oni, koji umjesto puno formula, o matematici, fizici, astronomiji, računarstvu itd., te o povijesti znanstvenih ideja vole čitko, britko, duhovito i popularno pisano štivo, a žele si podići i razinu opće kulture, preporučujem knjigu poznatog britanskog matematičara i popularizatora Iana Stewarta [10] (u odličnom prijevodu Vjere Lopac na hrvatski). Ta knjiga započinje, a mi ćemo završiti u stilu godine fizike 2005. citatom iz pisma Alberta Einsteina Maxu Bornu govoreći o kvantnoj fizici: "Vi vjerujete u Boga koji se kocka, a ja u potpuni zakon i red."

Literatura

[1] D. Veljan, *The 2500-Year-Old Pythagorean Theorem*, Mathematical Magazine, 73 (2000), 259–272.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I, II*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[3] X. Hou, H. Li, D. Wang, *"The Russian Killer"*, Mathematical Intelligencer **23**(2001), 9–15.

[4] D. Brown, *Da Vincijev kod*, VBZ, Zagreb, 2004.

[5] H. Walser, *The Golden Section*, Math. Assoc. Amer., Washington DC, 2001.

[6] D. Robbins, *Areas of polygons inscribed in a circle*, Amer. Math. Monthly, **102**(1995), 523–530.

[7] D. Svrtan, D. Veljan, V. Volenec, *Geometry of pentagons: from Gauss to Robbins*, `http://xxx.lanl.gov/abs/math.MG/0403503`

[8] L. Fejes-Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[9] Wu Wen-tsun, *Mathematics Mechanization*, Science Press, Kluwer Acad. Publ., Beijing, 2000.

[10] I. Stewart, *Kocka li se Bog? Nova matematika kaosa*, Naklada Jesenski i Turk, Zagreb, 2003.

⋆ ⋆ ⋆

Matematičar je slijep čovjek u mračnoj sobi koji traži crnu mačku koja nije tamna.

Charles Darwin

William Feller[1], Uvod u teoriju vjerojatnosti i primjene, I., (3)

Maja Sekulić[2], Zagreb

5. Diskretni prostor elementarnih događaja

Najjednostavniji prostori elementarnih događaja, su oni koji sadrže samo konačan broj, n, elementarnih događaja. Kad je n relativno mali (kao što je primjer bacanja nekoliko novčića), lako je zamisliti prostor elementarnih događaja. Prostor elementarnih događaja pri raspodjeli karata u Bridžu, malo je kompliciraniji, ali bismo mogli zamisliti da je svaki elementarni događaj predstavljen žetonom i da tada skup tih žetona predstavlja prostor elementarnih događaja. Događaj A (poput "Sjever ima dva asa") predstavljen je određenim setom žetona, a komplement A' preostalima. Potreban je samo jedan korak da se sada zamisli posuda s beskonačno mnogo žetona ili prostor elementarnih događaja s beskonačnim slijedom elementarnih događaja E_1, E_2, E_3,....

Primjeri. (a) Bacajmo novčić dok ne padne jedna glava. Elementarni događaji prostora elementarnih su onda: $E_1 = G$, $E_2 = PG$, $E_3 = PPG$, $E_4 = PPPG$, itd. Možemo ali ne moramo uzeti u obzir mogućnost da P nikada neće pasti. Ako je uzmemo, ta mogućnost trebala bi biti predstavljena elementarnim događajem E_0.

(b) Tri igrača a, b, c izmjenjuju se u igri, poput šaha, prema sljedećim pravilima. Na početku a i b igraju, dok je c van igre. Gubitnika zamjenjuje c i u drugoj partiji pobjednik igra protiv c, dok je gubitnik van igre. Igra se nastavlja na taj način dok neki od igrača ne pobijedi dva puta uzastopce, i na taj način ne postane pobjednikom igre. Radi pojednostavljenja isključili smo mogućnost izjednačenja. Mogući ishodi naše igre prikazani su u sljedećoj shemi:

$$\begin{array}{l} aa,\ acc,\ acbb,\ acbaa,\ acbacc,\ acbacbb,\ acbacbaa,\dots \\ bb,\ bcc,\ bcaa,\ acabb,\ bcabcc,\ bcabcaa,\ bcabcabb,\dots. \end{array} \qquad (*)$$

U nastavku, zamislivo je da niti jedan igrač nikada ne pobijedi dva puta za redom, u tom slučaju igra se beskonačno nastavlja prema jednome od uzoraka

$$acbacbacbacb\dots,\ bcabcabcabca\dots. \qquad (**)$$

Prostor elementarnih događaja, koji odgovara našem idealiziranom "pokusu", definiran je pomoću $(*)$ i $(**)$ i beskonačan je. Jasno je da se elementarni događaji mogu složiti u jednostavan slijed tako da prvo uzmemo dva elementarna događaja $(**)$ i nastavimo

[1] William Feller (Zagreb 1906. – New York 1970.) je znameniti hrvatsko-američki matematičar.

[2] Autorica je studentica Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Kao seminarski rad (voditelj prof. dr. sc. Darko Žubrinić) prevela je uvodni dio trećeg izdanja knjige William Feller, An Intrroduction to Probability Theory and Its Applications, 1968. E-mail: Maja.Sekulic@fer.hr

s elementarnim događajima iz $(*)$ po redu aa, bb, acc, bcc,.... [Vidi problemske primjere 5-6, primjer V,(2.a), i problemski primjer 5 u XV, 14.]

Definicija. Prostor elementarnih događaja naziva se diskretnim ako se sastoji od samo konačno mnogo elementarnih događaja ili beskonačno mnogo elementarnih događaja koji se mogu poredati u jednostavan niz E_1, E_2,...

Nije svaki prostor elementarnih događaja diskretan. Poznat je teorem (zahvaljujući G. Cantoru) prema kojem prostor elementarnih događaja koji se sastoji od svih pozitivnih brojeva, nije diskretan. Ovdje smo suočeni s razlikovanjem poznatim u mehanici. Uobičajeno je prvo uzeti u obzir diskretne mase čestica, od kojih svaka ima konačnu masu, a zatim prijeći na zapis kontinuirane raspodjele mase, pri čemu svaka čestica ima nultu masu. U prvom slučaju, masa sustava očuvana je dodavanjem masa pojedinih čestica, u drugom slučaju, mase se računaju preko integrala po masi. Sasvim slično, vjerojatnosti događaja u diskretnom prostoru elementarnih događaja dobiju se jednostavnim zbrajanjem, dok je nasuprot tome u ostalim vjerojatnosnim prostorima, integralni račun nužan. Osim tehničkih metoda koje zahtijevaju, ova dva slučaja nemaju bitnih razlika. U svrhu predstavljanja stvarnih vjerojatnosnih razmatranja, nesputanih tehničkim poteškoćama, promatrat ćemo samo diskretne prostore elementarnih događaja. Pokazat će se da čak i ovaj poseban slučaj, vodi mnogim zanimljivim i važnim rezultatima.

6. Vjerojatnosti u diskretnom prostoru elementarnih događaja: pripreme

Vjerojatnosti su brojevi iste prirode kao udaljenosti u geometriji ili mase u mehanici. Teorija pretpostavlja da su dani ali ne treba pretpostavljati ništa o njihovoj stvarnoj brojčanoj vrijednosti, niti kako se u stvarnosti mjere. Neke od najvažnijih primjena su kvalitativne prirode, i neovisne su o brojčanoj vrijednosti. Za relativno malo slučajeva, gdje su potrebne brojčane vrijednosti vjerojatnosti, postupak široko varira kao i metoda koja određuje udaljenosti. Malo je zajedničkog u praksi stolara, geometara, pilota i astronoma kad mjere udaljenosti. U našem slučaju možemo prihvatiti difuzijsku konstantu koja je osnova teorije vjerojatnosti. Da bi se našla njena brojčana vrijednost potrebno je slaganje s drugim fizikalnim teorijama, direktno mjerenje nije moguće. Suprotno tome, tablice smrtnosti su složene od upravo nerafiniranih opažanja. U mnogim aktualnim primjenama određivanja vjerojatnosti, ili usporedba teorije i opažanja, zahtijeva upravo sofisticirane statističke metode koje se opet temelje na usavršenoj teoriji vjerojatnosti. Drugim riječima, intuitivno značenje vjerojatnosti je jasno, ali jedino ako se prosljeđuje bit će jasno koliko je primjenjiva. Sve moguće "definicije" vjerojatnosti brzo padaju pred stvarnom primjenom.

Pri bacanju "ispravnog" novčića ne oklijevamo pridružiti vjerojatnost $\frac{1}{2}$ bilo "glavi" ili "pismu". To možemo reći da kad se novčić baca n puta, svaki od 2^n mogućih ishoda ima istu vjerojatnost. S teoretskog stajališta, ovo je *pravilo*. Često se tvrdilo da je ovo pravilo logički neizbježno i jedino moguće. Pa ipak, bilo je filozofa i statističara koji su definirali konvenciju i kretali od suprotnih pretpostavki (jednolikosti ili nejednolikosti u prirodi). Također se tvrdilo da s vjerojatnosti $\frac{1}{2}$ očekujemo zbog iskustva. Štoviše, kad god su korištene profinjene statističke metode pri provjerama stvarnih bacanja novčića, rezultat je bilo *nejednako* vjerojatno pojavljivanje glave i pisma. Ipak se držimo našeg modela "idealnog" novčića, iako u potpunosti ispravan novčić ne postoji. Zadržavamo taj model, ne samo zbog njegove logičke jednostavnosti, već u bitnom radi njegove korisnosti i primjenjivosti. U mnogim primjenama vrlo vjerno prikazuje stvarnost. Još je važnija empirijska činjenica da se odstupanja od naše sheme uvijek združuju s fenomenima kao što je pomaknutost centra gravitacije od geometrijskog

centra. U tom smislu naš idealizirani model može biti krajnje koristan, iako nikad nije izravno primjenjiv. Na primjer, u suvremenom upravljanju kakvoćom temeljenom na Sewhartovim metodama, idealizirani vjerojatnosni modeli koriste se za otkrivanje "prepoznatljivih uzroka" neželjenih odstupanja od tih modela, da bi uklanjali moguće nedaće sa strojevima i sredili nepravilnosti u ranoj fazi.

Slična razmatranja primjenjuju se u drugim slučajevima. Broj mogućih podjela karata u Bridžu je približno 10^{30}. Obično se slažemo da ih možemo smatrati međusobno jednako mogućima. Za provjeru ove konvencije bilo bi potrebno izvršiti više od 10^{30} podjela – tisuće milijardi godina ako bi svaka živuća osoba igrala po partiju u sekundi, danju i noću. Kako bilo, posljedice pretpostavke mogu se eksperimentalno provjeriti, primjerice, promatrajući učestalost više aseva u rukama igrača u Bridžu. Ispada, da za neosjetljive svrhe, idealizirani modeli sasvim dobro opisuju iskustvene činjenice, ako se karte izmiješaju bolje no inače. Važnije je da idealizirani model, kad nije primijenjen, dopušta otkrivanje "prepoznatljivih uzroka" u nepravilnostima, primjerice, rekonstrukcija načina miješanja. To su primjeri ograničene važnosti, ali upućuju na korisnost pretpostavljenih modela. Više zanimljivih slučajeva pojavit će se kroz napredovanje teorije.

Primjeri. (a) *Razlučive kuglice*. U primjeru $(2.a)$ prirodno je pretpostaviti da su svi elementarni događaji *jednako vjerojatni*, tj. da *svaki elementarni događaj ima vjerojatnost* $\frac{1}{27}$. Možemo krenuti od *definicije* i proučiti njene posljedice. Hoće li se ili neće naš model približiti stvarnom iskustvu, ovisit će o vrsti predmeta opažanja na koji se primjenjuje. U nekim primjenama pretpostavka jednolike razdiobe vjerojatnosti predodređena je stvarnim razmatranjima; u drugima se uvodi kako bi poslužila kao osnovni model za općenitu upotrebu, iako je prilično očito da predstavlja tek prvu, grubu aproksimaciju [primjerice, prouči primjere $(2.b,1)$, rođendani; $(2.b,7)$, problem dizala; ili $(2.b,\ 11)$ skupljanje kupona].

(b) *Razlučive kuglice: Statistika Bose-Einsteina*. Vraćamo se sada primjeru $(2.c)$ triju međusobno istovjetnih kuglica u trima kutijama. Moguće je dokazati da naša nesposobnost razlikovanja kuglica ne utječe na stvarni fizikalni pokus; fizički ostaje 27 različitih mogućnosti, iako je zapravo razlučivo samo deset različitih oblika. To nas razmatranje vodi prema pridruživanju sljedećih vjerojatnosti elementarnim događajima iz Tablice 2.

Redni broj:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Vjerojatnost:	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

Mora se priznati da se za većinu primjena navedenih u primjeru $(2.b)$ takvo zaključivanje čini na mjestu i značajnost vjerojatnosti čini razumnom. Povijesno gledano, naše je zaključivanje dugo bilo bespogovorno prihvaćano i služilo u mehaničkoj statistici kao osnova za izvod *Maxwell–Boltzmanove* statistike raspodjele r kuglica u n kutija. Tim je veće bilo iznenađenje, kad su Bose i Einstein pokazali, kako su određene čestice podložne *Bose–Einsteinovoj* statistici (za detalje vidjeti II,5). U našem slučaju, za $r = n = 3$, ovaj model pridjeljuje *vjerojatnost* $\frac{1}{10}$ *svakome od deset elementarnih događaja*.

Ovaj primjer pokazuje da su različita pridruživanja vjerojatnosti u skladu s istim prostorom elementarnih događaja i predočuje složenu povezanost između teorije i iskustva.

broj bacanja	broj glava										ukupno
0 – 1 000	54	46	53	55	46	54	41	48	51	53	501
– 2 000	48	46	40	53	49	49	48	54	53	45	485
– 3 000	43	52	58	51	51	50	52	50	53	49	509
– 4 000	58	60	54	55	50	48	47	57	52	55	536
– 5 000	48	51	51	49	44	52	50	46	53	41	485
– 6 000	49	50	45	52	52	48	47	47	47	51	488
– 7 000	45	47	41	51	49	59	50	55	53	50	500
– 8 000	53	52	46	52	44	51	48	51	46	54	497
– 9 000	45	47	46	52	47	48	59	57	45	48	494
– 10 000	47	41	51	48	59	51	42	55	39	41	484

Tablica 3

Posebice nas uči da se ne oslanjamo previše na *a priorna* zaključivanja i da budemo pripravni prihvatiti nove i nepredviđene sheme.

(c) *Bacanje novčića.* Tumačenje učestalosti u tvrdnji o jednakim vjerojatnostima, zahtijeva praćenje stvarnih pokusa. U stvarnosti je svaki novčić deformiran i moguće je oformiti fizičke eksperimente, koji se približavaju idealiziranim modelima bacanja novčića, više nego što se približavaju pravi novčići. Da bismo približili ideju protoka očekivanih vrijednosti, prikazali smo podatke iz jednog takvog simuliranog pokusa koji odgovara pokusu s novčićem ponovljenom 10 000 puta.[3] Tablica 3 sadrži broj pojavljivanja "glava" u serijama od 100 pokusa od kojih svaki odgovara slijedu 100 ponavljanja s jednim novčićem. Ukupni zbroj je 4979. Gledajući ove prikaze, čitatelj je ostavljen s maglovitim osjećajem koji govori: Pa što? Činjenica je da je potrebna naprednija teorija za prosudbu do kojeg se stupnja takvi empirijski podatci slažu s našim apstraktnim modelom. (U prolazu, vratit ćemo se na ovo još u III,6.)

7. Osnovne definicije i pravila

Temeljne konvencije. *Za zadani prostor elementarnih događaja Ω s elementarnim događajima E_1, E_2, ..., pretpostavimo da je svakom elementarnom događaju E_i pridružen broj, koji nazivamo vjerojatnošću E_i i označen s $\mathbf{P}\{E_i\}$. Brojevi moraju biti nenegativni, takavi da je*

$$\mathbf{P}\{E_1\} + \mathbf{P}\{E_2\} + \ldots = 1. \tag{1}$$

Primijetite da ne isključujemo mogućnost da elementarni događaj ima vjerojatnost nula. Ova se konvencija može činiti usiljena, ali je nužna da bi se izbjegle komplikacije. U diskretnom prostoru elementarnih događaja nula se tumači kao nemoguće, i svaki elementarni događaj za kojega je poznato da mu je vjerojatnost nula, može se, bez loših posljedica, izuzeti iz prostora elementarnih događaja. No, često numeričke vrijednosti vjerojatnosti nisu unaprijed poznate, i ovakva razmatranja su potrebna da bi se odlučilo da li određeni elementarni događaj ima pozitivnu vjerojatnost.

Definicija. *Vjerojatnost $\mathbf{P}\{A\}$ bilo kojeg događaja A jest zbroj vjerojatnosti elementarnih događaja u njemu.*

[3] Tablica zapravo bilježi učestalost parnih znamenki u odjeljku *A million random digits with 100 000 normal deviates*, by The RAND Corporation, Glencoe, Illionis (The Free Press), 1955.

Prema (2) vjerojatnost čitavog prostora događaja Ω je jedan, ili $P\{\Omega\} = 1$. Odatle proizlazi da je za bilo koji događaj A

$$0 \leq \mathbf{P}\{A\} \leq 1. \tag{2}$$

Promotrimo sada bilo koja dva događaja A_1 i A_2. Da bismo izračunali vjerojatnost $\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2\}$ ostvarivanja jednog ili drugog ili oba, moramo zbrojiti vjerojatnosti svih elementarnih događaja sadržanih u A_1 ili u A_2, ali svaki elementarni događaj mora biti uključen samo jednom. Stoga imamo

$$\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2\} \leq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\}. \tag{3}$$

Sada, ako je E bilo koji događaj sadržan i u A_1 i u A_2, tada se $\mathbf{P}\{E\}$ pojavljuje dvaput s desne strane nejednakosti, ali samo jednom s lijeve strane vjerojatnosti. Stoga, desna strana premašuje lijevu za $\mathbf{P}\{A_1A_2\}$, imamo jednostavan, ali važan

Teorem. *Za bilo koja dva događaja A_1 i A_2 vjerojatnost da je nastupio A_1 ili A_2 ili oba, dana je s*

$$\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} - \mathbf{P}\{A_1A_2\}. \tag{4}$$

Ako je $A_1A_2 = 0$, odnosno, ako su A_1 i A_2 međusobno isključivi, tada (5) *prelazi u*

$$\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\}. \tag{5}$$

Primjer. Novčić je bačen dva puta. Za prostor elementarnih događaja uzimamo četiri elementarna događaja *GG*, *GP*, *PG*, *PP*, od kojih svaki ima vjerojatnost $\frac{1}{4}$. Neka A_1 bude "glava je pala pri prvom bacanju" i A_2 neka bude 'glava je pala pri drugom bacanju". Tada se A_1 sastoji od GG i GP, a A_2 od PG i GG. Nadalje, događaj $A = A_1 \cup A_2$ se sastoji od tri događaja *GG*, *GP*, *PG*, dok se A_1A_2 sastoji od jednog događaja *GG*. Pa je

$$\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Vjerojatnost $\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\}$ realizacije barem jednog od n događaja može se računati formulom analognom formuli (4). Ovdje uočavamo da se (4) može primijeniti na bilo koji broj događaja. Tako je za proizvoljne događaje A_1, A_2, ... nejednakost

$$\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \ldots\} \leq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} \ldots \tag{6}$$

valjana. U posebnom slučaju, kad su događaji A_1, A_2, ... međusobno isključivi, imamo

$$\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \ldots\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} \ldots \tag{7}$$

Ponekad se (6) smatra *Booleovom nejednakošću.*

Prvo bismo trebali istražiti jednostavan poseban slučaj prostora elementarnih događaja s konačnim brojem N elementarnih događaja, od kojih svaki ima vjerojatnost $\frac{1}{N}$. U tom slučaju, vjerojatnost bilo kojeg događaja A, jednaka je broju elementarnih događaja u A podijeljenim s N. U starijoj literaturi, elementarni događaji prostora elementarnih događaja nazivali su se "slučajevi", a elementarni događaji događaja A "povoljni" slučajevi (povoljni za A). *Ako* svi elementarni događaji imaju jednaku vjerojatnost, tada je vjerojatnost događaja A omjer broja povoljnih slučajeva i ukupnog broja slučajeva. Nažalost, ova izjava se previše iskorištavala pri "definiranju" vjerojatnosti. Često je uvriježeno mišljenje da su u *svakom* prostoru elementarnih događaja, vjerojatnosti svih elementarnih događaja jednake. To nije istina. Pri jednom bacanju neispravnog novčića, prostor elementarnih događaja će i dalje imati dva elementarna događaja, glavu i pismo, ali mogu imati proizvoljne vjerojatnosti p i q, tako da je $p + q = 1$. Novorođenče može biti dječak ili djevojčica, ali u stvarnosti moramo priznati, da te dvije mogućnosti nisu jednako vjerojatne. Daljnji protuprimjer, dan je u $(6,b)$. Upotrebljivost prostora elementarnih događaja u kojem svi elementarni događaji imaju istu vjerojatnost, gotovo u potpunosti je ograničena na proučavanje "igara na sreću" i kombinatorne analize.



Valovi samotnjaci

Hrvoje Buljan[1], *Zagreb*

Vjerujem da su rijetki oni koje ne fascinira pogled na morske valove koji se razbijaju o stijene. Generacije koje su odrasle prije masovne uporabe mobitela mogu biti fascinirane činjenicom da možemo s praktički bilo kojeg mjesta na zemlji nazvati mobilnim telefonom nekog drugog na kraju svijeta ili gledati televizijski prijenos s površine Mjeseca. Kada bi reinkarnirali nekog ribara s Galilejskog jezera od prije dvije tisuće godina, on bi bio fasciniran mogućnošću praćenja jata riba na malom ekranu u ribarskoj brodici. Roditelji su oduševljeni kada na ultrazvuku vide srce nerođene bebe kako kuca u majčinoj utrobi. Fizičari, su fascinirani činjenicom da su u srži svih gore navedenih pojava valovi, da sve te razne vrste valova mogu pokazivati univerzalne *valne pojave* kao što su *interferencija* ili *refleksija*, te da ih možemo opisivati *valnim jednadžbama,* koje mogu biti čak i identične za opis raznovrsnih tipova valova i valnih pojava. U ovom eseju govorit ćemo o **valovima samotnjacima** – *nelinearnoj valnoj pojavi* – otkrivenoj davne 1834. godine u valovima vode. Valovi samotnjaci do danas su pronađeni u raznim sustavima, te su i danas (možda više nego ikad prije) u fokusu mnogih istraživanja moderne fizike.

Kako postoje razne vrste valova, pomalo je nezahvalno napisati općenitu a opet dovoljno preciznu i točnu definiciju tog pojma. Općenito (i maglovito) možemo reći da je val poremećaj koji se prostire u prostoru i vremenu i prenosi energiju. Elektromagnetski valovi su titranja električnih i magnetskih polja koja se međusobno induciraju u prostoru i vremenu i tako prostiru vakuumom ili nekim sredstvom. Valove zvuka čine mehaničke vibracije u nekom sredstvu koje se kroz taj medij prostiru i prenose energiju; na primjer, vibracijske promjene tlaka u zraku možemo čuti kao zvuk. Čak se i materija npr. elektroni, protoni, atomi, mogu ponašati kao valovi i pokazivati valne pojave poput interferencije – valove materije opisujemo Schrödingerovom valnom jednadžbom odnosno kvantnom mehanikom.

Valom samotnjakom nazivamo lokalizirani valni paket, koji putuje sam, a pri tome ne mijenja svoj oblik i brzinu. No, umjesto općenitih i maglovitih definicija, više možemo naučiti promatrajući i proučavajući neki fizikalni sustav u prirodi ili laboratoriju (fizičari sustave egocentrično zovu fizikalni sustavi), postavljajući pitanja i diskutirajući o mogućim odgovorima.

Valove samotnjake otkrio je škotski znanstvenik John Scott Russell 1834. godine, blizu gradića Edinburgha, gdje je radio kao inženjer na uskim kanalima vode kojima se najčešće transportirao ugljen. John Scott Russell jednog je dana promatrao brod koji se gibao kanalom i zamijetio novi tip vala. Nekoliko godina kasnije je napisao:

Promatrao sam gibanje broda koji su u uskom kanalu vrlo brzo vukla dva konja. Brod se naglo zaustavio, ali velika količina vode koja se akumulirala ispred pramca,

[1] Autor je docent na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: hbuljan@phy.hr.

snažno pobuđena, nastavila je gibanje. Stvorio se jedan jedini val i velikom se brzinom zakotrljao niz kanal ostavljajući brod iza sebe. Val je bio u obliku glatke uzvisine, dobro definiranog oblika, te se nastavio gibati niz kanal bez promjene oblika i bez smanjenja brzine. Slijedio sam val jašući na konju nekih osam do devet milja. On se još kotrljao niz kanal bez promjene oblika, duljine od oko tridesetak stopa i oko jednu do jednu i pol stope visine. Visina mu se tada počela smanjivati i nakon potjere od još milju do dvije izgubio sam ga iz vida u zavojima kanala. To je opis događaja iz mjeseca kolovoza 1834. godine kada sam se prvi puta susreo s jedinstvenom i prelijepom pojavom koju sam nazvao Val translacije.



Slika 1. Fotografija vala samotnjaka načinjenog na Union kanalu u Škotskoj.

Slika 1 prikazuje fotografiju s Union kanala u Škotskoj gdje danas možete u čamcu slijediti val samotnjak u vodi kao turističku atrakciju. Nakon svog otkrića g. Russell je napravio niz pokusa u kojima je dalje istraživao otkrivenu valnu pojavu. Međutim, možda i zbog toga što se njegovo otkriće u to doba nije činilo tako značajno kao danas, teorijsko objašnjenje valova samotnjaka čekalo je šezdesetak godina. Godine 1895., dvojica su Nizozemaca, Korteweg i de Vries, krećući od temeljnih zakona hidrodinamike izveli jednadžbu – danas ju zovemo Korteweg-de Vries (KdV) jednadžba – koja matematički opisuje val samotnjak u plitkoj vodi. Ključna stvar u njihovom opisu vala samotnjaka jest nelinearnost.

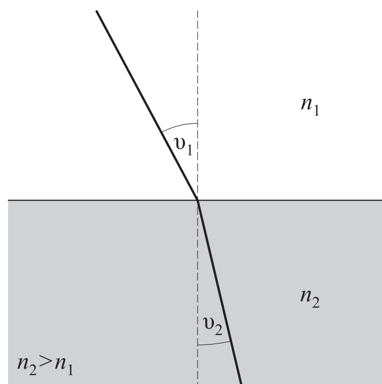
Što je nelinearnost i zašto je ona važna za postojanje valova samotnjaka objasniti ćemo na drugom primjeru: *optičkom valu samotnjaku*. U optici proučavamo prostiranje svjetlosti u vakuumu i raznim prirodnim i umjetno stvorenim materijalima. Iako u geometrijskoj optici svjetlost možemo zamisliti kao zrake koje se pravocrtno prostiru, svjetlost je u stvari elektromagnetski val, tj., titranje električnih i magnetskih polja koja međusobnom indukcijom putuju kroz prostor i vrijeme. Svjetlost čine elektromagnetski valovi valnih duljina od 400–700 nanometara, tj., od ljubičaste do crvene svjetlosti (jedan nanometar je milijarditi djelić metra).

Da bi opisali nelinearnost potreban nam je pojam indeksa loma. Indeks loma n nam govori koliko se brzina svjetlosti u nekom sredstvu v_f (preciznije, radi se o faznoj brzini v_f), promjeni u odnosu na brzinu svjetlosti u vakuumu c. Te su brzine povezane

jednadžbom $n = \frac{c}{v_f}$. Za primjer, indeks loma zraka je približno 1, a vode je približno 1.3. Kada zraka svjetlosti ulazi iz sredstva indeksa loma n_1 u sredstvo indeksa loma n_2, kao što je prikazano na slici 2, ona se lomi. Lom svjetlosti opisan je Snellovim zakonom:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{1}$$

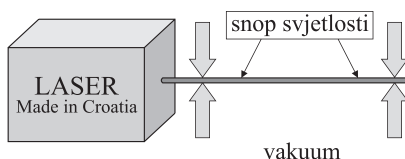
gdje su kutovi definirani na slici 2.



Slika 2. Zraka svjetlosti (puna linija) lomi se kod prelaza iz sredstva indeksa loma n_1 u sredstvo indeksa loma n_2. Kutovi ϑ_1 i ϑ_2 mjere se od okomice (točkasto-crtkana okomita crta).

Svjetlost se lomi tako kao da želi skrenuti prema sredstvu većeg indeksa loma (vidi sliku 2)! Indeks loma nekog sredstva je nelinearan ukoliko se mijenja ovisno o intenzitetu svjetlosti kojom je ono obasjano. On tada nije jednak u svakoj točki sredstva već ovisi o intenzitetu svjetlosti u datoj točki, npr., indeks loma na mjestu obasjanom laserskim snopom može malo porasti u odnosnu na okolinu obasjanog mjesta.

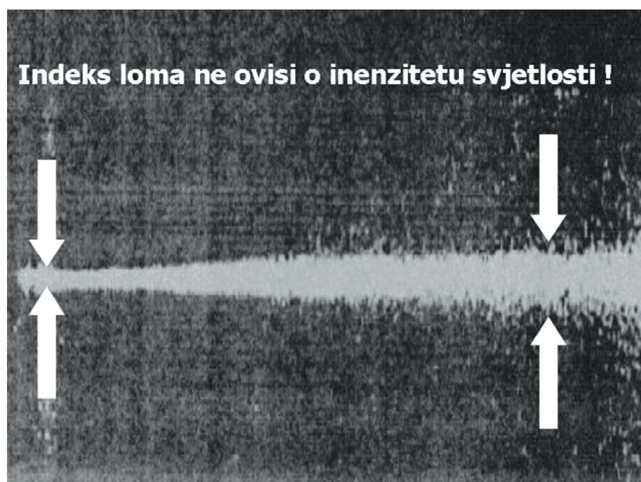
Da li je to moguće?



Slika 3. Da li je moguće iskonstruirati takav laser, da emitira snop svjetlosti u vakuum, a koji će se prostirati bez promjene debljine tijekom propagacije? Debljina snopa je naznačena strelicama.

Zamislimo sada eksperiment u kojem laserski snop svjetlosti usmjerimo u vakuum ili sredstvo indeksa loma n (male lasere izgleda penkala danas možemo kupiti u običnom dućanu). Postavljamo pitanje: Možemo li tako precizno usmjeriti snop svjetlosti da on putuje čineći cilindar u prostoru, a bez promjene debljine snopa tijekom propagacije (vidi sliku 3)? Odgovor je ne! Koliko god se mi trudili tako savršeno napraviti snop radeći raznorazne tehničke izmišljotine, debljina snopa svjetlosti će se povećavati tijekom propagacije u vakuumu ili sredstvu nekog indeksa loma n. Uzrok tome jest valna priroda svjetlosti. Pojava širenja lokaliziranog snopa tijekom propagacije naziva

se i difrakcija (i raspršenje svjetlosti na optičkoj rešetki također se naziva difrakcija no to su različite pojave).



Slika 4. Laserski snop svjetlosti ulazi u sredstvo (s lijeva) i propagira se. Indeks loma sredstva ne ovisi o intenzitetu svjetlosti. Za posljedicu, debljina snopa se širi tijekom propagacije (označeno srelicama).

Slika 4 prikazuje eksperiment s laserskim snopom. Na slici je prikazano sredstvo određenog indeksa loma n, a s lijeve strane laserski snop svjetlosti ulazi u taj medij. Primijeti da se debljina snopa svjetlosti povećava tijekom propagacije.



Slika 5. Optički val samotnjak. Laserski snop svjetlosti ulazi s lijeve strane u nelinearan medij. Intenzitet svjetlosti je najveći u središtu snopa. Zbog nelinearnosti, indeks loma je također veći u središti (vrlo malo veći, ali dovoljno za stvaranje efekta).

Ukoliko sredstvo u kojem se prostire svjetlost ima nelinearan indeks loma, odnosno ukoliko se indeks loma poveća u onim točkama gdje je intenzitet svjetlosti veći,

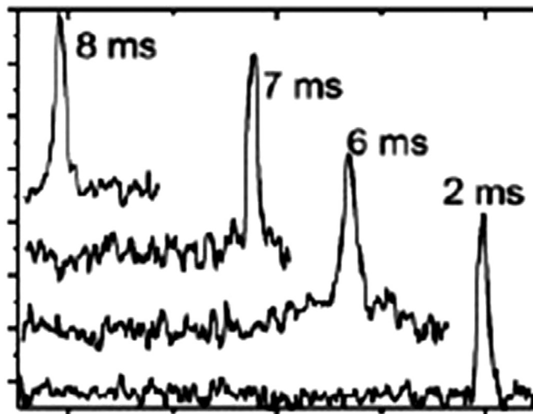
odebljanje snopa svjetlosti tijekom propagacije može se zaustaviti. Na slici 5 prikazan je snop svjetlosti koji se širi u nelinearnom sredstvu. Indeks loma materijala je nešto veći u središtu snopa gdje je intenzitet svjetlosti jak, nego izvan područja snopa. Iz Snellovog zakona (slika 2) znamo da svjetlost "skreće" prema području većeg indeksa loma, odnosno u ovom slučaju želi skrenuti prema središtu snopa. Stoga, zbog nelinearnosti, stvara se tendencija snopa da se sužava tijekom evolucije. Ta se pojava zove *samofokusiranje* jer snop kao da sam stvara leću koja ga fokusira prema njegovom središtu. Ukoliko se tendencija snopa za širenjem prikazana na slici 4 u potpunosti uravnoteži s nelinearnim samofokusiranjem, dobili smo laserski snop koji se prostire bez promjene oblika. Takav snop zovemo optički val samotnjak a njegova eksperimentalna realizacija prikazana je na slici 5.

Valovi samotnjaci su univerzalne valne pojave, a pronađeni su u raznim sustavima. Pogledajmo sustav ultrahladnih atomskih plinova koje se kreću i do nekoliko desetaka nano Kelvina (nK) (dakle, samo desetak milijarditih dijelova stupnja iznad apsolutne nule – to je zaista hladno). Ukoliko je takav plin bozonski (objasnit ću poslije), sve čestice će na dovoljno niskoj temperaturi kondenzirati u jedno kvantno stanje. Ta se pojava naziva Bose-Einsteinova kondenzacija (BEK) prema indijskom fizičaru imena Satyendra Nath Bose i slavnom Albertu Einsteinu koji su napravili teorijsko predviđanje BEK još davne 1925. godine. Međutim, nedvosmislena eksperimentalna realizacija bozonskog kondenzata čekala je 1995. godinu; za te eksperimente je dodijeljena i Nobelova nagrada fizičarima Cornellu, Wiemanu i Ketterleu 2001. godine.

Što su u biti bozoni odnosno BEK? Sustave atomskih plinova na ultrahladnim temperaturama ne možemo sasvim precizno opisati Newtonovim zakonima već teorijom kvantne mehanike. Bozoni su čestice kod kojih je kvantni spin cjelobrojan (0,1,2,...); kvantni spin određuje neka od svojstava čestica npr. njihovo ponašanje u magnetskom polju. U Newtonovoj mehanici stanje nekog plina možemo opisati ako znamo koordinate i brzine svih čestica u plinu. U kvantnoj mehanici koristimo takozvanu valnu funkciju $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N, t)$ koja može poprimati kompleksne vrijednosti (učili ste kompleksne brojeve!). Argumenti funkcije $x_1, x_2, \ldots, x_N$ i t su realni brojevi. Broj prostornih koordinata x_i jednak je broju čestica N a t je vrijeme jer stanje sustava se može mijenjati u vremenu kao što se i koordinate i brzine klasičnog Newtonovog plina mogu mijenjati u vremenu. Za bozonske plinove sazdane od istovrsnih čestica vrijedi sljedeće: Valna funkcija mora biti potpuno simetrična na zamjenu koordinata dviju čestica, npr., ako zamijenimo prve dvije koordinate imamo $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N, t) = \psi(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_N, t)$. Kao posljedicu toga, može se pokazati da na vrlo niskim temperaturama valnu funkciju možemo zapisati kao produkt $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N, t) = \Phi(x_1, t)\Phi(x_2, t) \cdots \Phi(x_N, t)$ što se fizikalno može interpretirati kao da su svi bozoni kondenzirali u jedno stanje $\Phi(x, t)$ sa samo jednom koordinatom. Fizikalne posljedice te pojave su mjerljive i fascinantne, npr., raspodjela impulsa (brzina) kondenziranog plina je vrlo uska, kao da su sve čestice "smrznute" u nultoj brzini. Naglasimo još jednom da se to događa za bozonske čestice, odnosno one kod kojih valna funkcija $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N, t)$ mora imati potpunu simetriju na zamjenu prostornih koordinata.

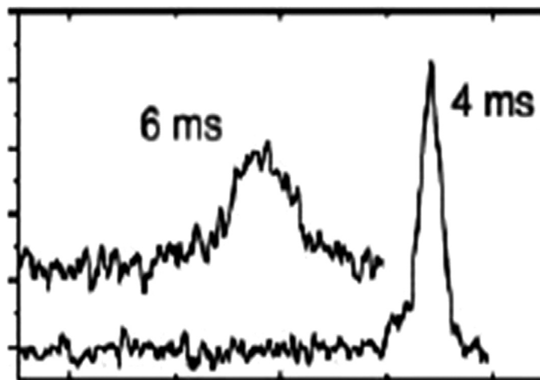
Sada kad smo postali stručnjaci za Bose-Einsteinovu kondenzaciju pogledajmo što su valovi samotnjaci u sustavu ultrahladnih atomskih plinova. Ukoliko čestice plina međusobno ne reagiraju (jedna čestica "ne vidi" drugu), zbog valne prirode materije koja se manifestira u ovom sustavu, lokalizirana nakupina čestica će se raspršiti, bez obzira što je sustav vrlo hladan i sve su čestice na početku u stanju za koje je očekivana brzina nula. Međutim, ukoliko se atomi malo privlače (kao Zemlja i Mjesec), tada može doći do efekta potpuno analognog samofokusiranju koje smo opisali u optici: Zbog privlačenja čestica stvara se sila koja je protivna tendenciji lokaliziranog

Bose-Einsteinovog kondenzata da se raspurši. Ukoliko su te dvije suprotne tendencije u ravnoteži, tada se valni paket koji opisuje kondenzat $\Phi(x,t)$ ponaša kao val samotnjak, odnosno ne mijenja svoj oblik u prostoru (niti se širi niti skuplja) kako vrijeme odmiče.



Slika 6. Vremenska evolucija vala samotnjaka načinjenog od atoma Litija-7. Slika prikazuje gustoću atomskog oblaka tijekom prvih osam milisekundi gibanja. Atomi se vrlo slabo privlače.

Slika 6 prikazuje eksperimentalno mjerenje koje prikazuje gustoću nakupine kondenziranih atoma Litija-7 (bozonske čestice) kako odmiče u vremenu bez raspršivanja [L. Khajkovich et al., Science 296, 1290 (2002).]. Ukoliko se česticama isključi međusobno privlačenje, što je moguće u ovom sustavu napraviti korištenjem vanjskih magnetskih polja, tada se lokalizirani atomski valni paket širi, kao što je prikazano na slici 7 (sjetite se – koristimo kvantnu mehaniku i valne funkcije za opis atomskog sustava).



Slika 7. Vremenska evolucija kondenzata načinjenog od atoma Litija-7. Atomi ne međudjeluju (nema niti privlačenja niti odbijanja). Oblak se raspršuje, za razliku od slike 6.

Tako, dok moderni pjesnici pjevaju o porukama SMS-a koje se gužvaju na nebu iznad nas, fizičar zamišlja elektromagnetsko polje koje oscilira u prostoru i vremenu te prenosi informaciju (i pomalo energije) od jedne do druge antene. Valne su pojave zanimljive i lijepe a njihovu ljepotu možemo doživjeti na razne načine. Ovdje smo govorili o valovima samotnjacima, nelinearnim valnim pojavama koje se javljaju u raznim fizikalnim sustavima.



ASTRONOMIJA

Dvojne zvijezde kao izvori znanja

Ettore Tamajo[1], *Zagreb*

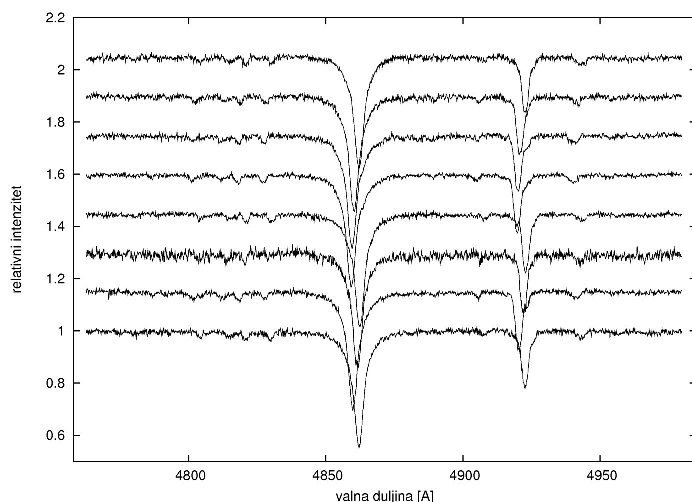
Fizika dvojnih zvijezda je znatno složenija od fizike jednostrukih zvijezda. Razlozi su prije svega gravitacijsko međudjelovanje, te međusobno zagrijavanje atmosfera zbog čega dolazi do narušavanja simetrije i potrebe za upotrebom znatno složenijih modela. Na duljoj vremenskoj skali evolucija komponente u bliskom dvojnom sustavu različita je od evolucije jednostruke zvijezde slične mase. Nadalje, u nekim fazama evolucije može doći do prijenosa zvjezdanog materijala s jedne komponente na drugu. No, usprkos njihovoj kompliciranosti, važno je naglasiti da su dvojni zvjezdani sustavi osnovni izvor fundamentalnih podataka o stanju i razvoju zvijezde pa ih je vrlo važno i vrijedno proučavati. Dvojni zvjezdani sustavi su dakle od fundamentalne važnosti za razumijevanje fizike zvijezda, pa time i svemira kao cjeline (npr. njihovim proučavanjem je moguće preciznije odrediti udaljenosti zvjezdanih skupova i galaksija u kojima se nalaze, što je iznimno važno za kozmologiju).

Od naročitog su interesa dvojne zvijezde u režimu pomrčina, kod kojih su snage zračenja komponenata sumjerljive. Režim pomrčina pretpostavlja dvojni zvjezdani sustav kod kojeg je inklinacija (nagib) orbite pod velikim kutom prema doglednici opažanja, pa su u svjetlosnoj krivulji jasno vidljivi i primarni i sekundarni minimum sjajnosti dvojnog sustava (koji su posljedica "pomračivanja" jedne zvijezde drugom). Simultanom analizom svjetlosnih krivulja i krivulja radijalnih brzina komponenata možemo izračunati polumjere, omjere luminoziteta te mase pojedinih komponenata dvojne zvijezde. Za dvojne zvijezde, polumjeri komponenata se mogu odrediti sa znatno većom točnošću od one koju postižemo kod jednostrukih zvijezda primjenom čak i najpreciznijih, interferometrijskih tehnika. Interferometar jest uređaj kojim se postiže visoka kutna razlučivost spajanjem dvaju ili više teleskopa kako bi radili poput jednog instrumenta – na taj je način moguće postići maksimalnu razlučivost zvjezdanih spektralnih linija. No i tako dobiveni rezultati za polumjere zvijezda manje su precizni od onih koji se mogu dobiti za svaku od komponenata analizom dvojnog sustava.

Metoda spektralnog raspetljavanja nova je i moćna tehnika koja omogućuje razdvajanje individualnih spektara komponenata iz vremenske serije složenih spektara dvojnog zvjezdanog sustava (Simon & Sturm, 1994, A&A, 281, 286). Rezultat te metode su orbitalni elementi sustava, te razdvojeni spektri komponenata s mnogo većim signalom prema šumu nego što je slučaj s pojedinim složenim spektrima dvojne zvijezde te orbitalni elementi. U postupku raspetljavanja složenih spektara, provodi se prilagodbeni postupak u kojem se, kriterijem metode najmanjih kvadrata, model nastoji približiti opaženim spektrima. Konačno rješenje daje spektre komponenata usaglašenih s parametrima orbite. Dobiveni se spektri mogu analizirati spektroskopskim analitičkim metodama kao spektri

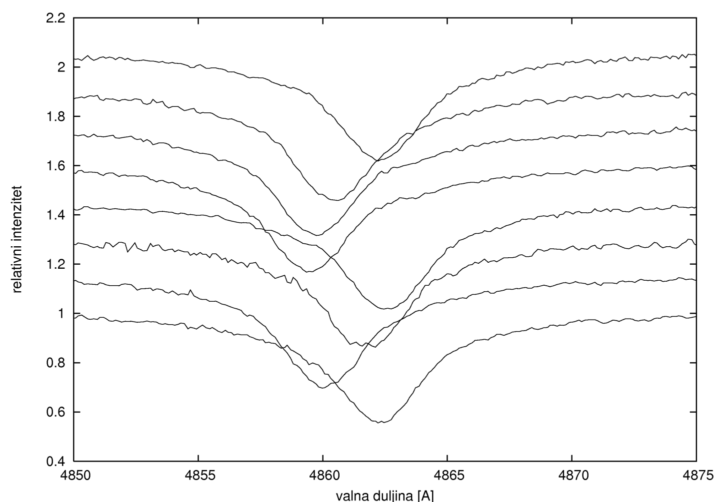
[1] Autor je asistent na katedri za astrofiziku Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, e-mail: `etamajo@phy.hr`.

pojedinačnih zvijezda, ali s velikom prednošću da se površinsko ubrzanje gravitacijske sile može direktno i vrlo precizno odrediti iz analize dvojnog sustava (u slučaju da je pomrčinski).



Slika 1. Vremenski niz opaženih složenih spektara

Slika 1. pokazuje složene spektre dvojnog zvjezdanog sustava snimljene u različitim orbitalnim fazama, pri čemu je sama orbita dvojnog zvjezdanog sustava ekscentrična. Dublja linija je Balmerova linija H_β na 4861.332Å, dok je druga linija HeI na valnoj duljini 4921.931Å (Balmerove linije su spektralne linije koje odgovaraju prijelazima elektrona između raznih atomskih orbitala, nalaze se u vidljivom i ultraljubičastom dijelu elektromagnetskog spektra).



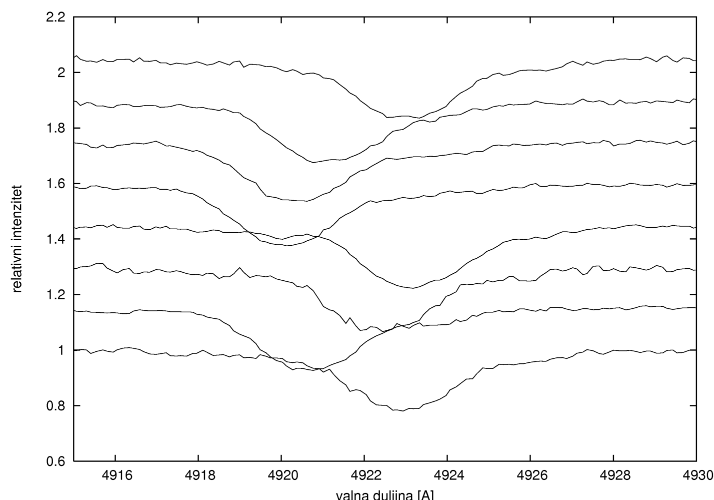
Slika 2. H_β linija kompozitnih složenih spektara

Poteškoća u analizi ovakvih složenih spektara jest u tome što je uz Dopplerovo pomicanje linija prisutna i rotacija zvijezde oko svoje osi, pa se spektralne linije i zbog toga šire. Dopplerov pomak zvjezdanog spektra koji nastaje uslijed udaljavanja ili približavanja zvijezde ne mijenja oblik spektralnih linija i prepoznatljiv je kao pomak spektralnih linija prema crvenom ili plavom dijelu spektra. Iznos tog pomaka mjeri brzinu kojom se zvijezda giba duž doglednice u odnosu na opažača i naziva se radijalna brzina zvijezde. Radijalna se brzina zvijezde može dobiti usporedbom mjerenog spektra zvijezde i teorijskog spektra. Izraz koji nam omogučava izračunati radijalnu brzinu zvijezde jest nerelativistički izraz za Dopplerov pomak (brzine "običnih" zvijezda dosežu najviše nekoliko stotina km/ s).

$$V_{rad} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} c$$

pri čemu je λ izmjerena valna duljina, λ_0 teorijska valna duljina a c brzina svjetlosti.

Pri vlastitoj vrtnji zvijezde, neki njeni dijelovi se približavaju promatraču, a neki udaljavaju, pa to također mijenja oblik uočenih spektralnih linija. Jake linije postaju šire i poprimaju oblik rotacijskog profila, dok se slabe linije gube u kontinuumu. Tu pojavu zovemo rotacijskim širenjem spektra zvijezde. Na slici 1 je vidljivo kako zbog orbitalnog gibanja dvojnog sustava oko centra mase linije H_β i HeI 'plešu' lijevo-desno ovisno o vremenskom nizu spektra. Treba napomenuti i činjenicu da je slabije sjajna komponenta dvojnog sustava toliko manjeg svjetlosnog doprinosa, da se u složenom spektru ne može niti razabrati, a čemu doprinosi i širenje linija uslijed rotacije zvijezde. Slike 2 i 3 prikazuju pojavu Dopplerovog širenja linija H_β i HeI na finijim skalama valnih duljina.



Slika 3. HeI *linija kompozitnih složenih spektara*

Zadatak. Izračunajte radijalne brzine zvijezde iz izraza za nerelativistički Dopplerov pomak mjereći ravnalom valnu duljinu središta linija H_β i HeI na slici 2 i 3. Faze pojedinih spektara počev od najdonjeg imaju vrijednosti 0.640, 0.305, 0.550, 0.788, 0.189, 0.263, 0.351 i 0.664. Nakon izračuna radijalnih brzina nacrtajte graf ovisnosti V_{rad} o fazi na intervalu $[0, 1]$. O kakvoj se krivulji radi?

ZABAVNA MATEMATIKA

Raspodjela

Tri brata, Ante, Branko i Cvjetko s uspjehom su obavila jedan posao i zaradili priličnu svotu novca. Kada je došlo do podjele, odmah se javio najstariji brat Ante:

— Ja uzimam 2400 kuna i 1/ 4 ostatka, Branko dobiva 4800 kuna i 1/ 4 novoga ostatka, a Cvjetku pripada sve što je preostalo.

— Znači, meni ostaci? Zar zato što sam najmlađi? I zašto Branko dobiva najviše? — ljutio se Cvjetko.

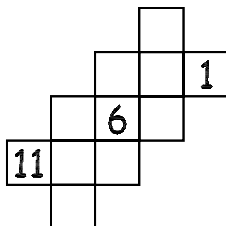
— Ne ljuti se, brate — smješkao se Ante. — Raspodjela je pravedna. Svi dobivamo isti iznos. I ti bi to uočio da nisi uvijek ratovao s matematikom.



Kolika je zarada braće?

Uvijek isto

Ljetni su dani dugi i često je moguće prikratiti vrijeme rješavanjem zanimljivih glavolomki. Evo jedne:



U lik s 11 kvadratnih polja treba upisati sve brojeve od 1 do 11, ali tako da zbrojevi svih vodoravnih i okomitih trojki brojeva budu isti. Da bismo vam olakšali posao, u lik su već upisani brojevi 1, 6 i 11.

Sretan rođendan!

Majka i kći u tišini pripremaju svečani ručak za proslavu zajedničkog rođendana. Tišinu je prva narušila kći:

— Zaista zgodno! Znaš li, mama, da ja ove godine navršavam toliko godina koliko iznosi zbroj znamenki moje godine rođenja.

— Kakva slučajnost! Gle, a ja navršavam toliko godina koliko iznosi trostruki zbroj znamenki moje godine rođenja! — javila se majka nakon kratkog razmišljanja.



Odredite godine rođenja majke i kćeri.

Kombinirani račun

Profesor Sumić je šutke ispisao na ploči račun u kojemu su povezani množenje i zbrajanje. Na licima učenika vidjela se nedoumica: što da se radi?

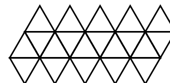
— Da, da, ništa nije zadano, ali pod ovim zvjezdicama krije se prvih devet prirodnih brojeva — objasnio je profesor. — Tko će prvi otkriti njihovu tajnu i dobiti valjan račun?

$$\begin{array}{r} \underline{\ast\ast\cdot\ast} \\ \ast\ast \\ \underline{+\,\ast\ast} \\ \ast\ast \end{array}$$

Sad je bilo jasno, ali da li i lako rješivo. Što vi mislite?

Mreža ikosaedra

U stereometriji postoji pet pravilnih poliedara koji se još nazivaju i Platonova tijela. To su: tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar. Prva tri se često susreću u prirodi, a posljednja dva su manje poznata. Na crtežu vidite mrežu petog Platonovog tijela, ikosaedra. Pažljivim gledanjem mogu se na njoj uočiti različiti pravilni trokuti i paralelogrami.



Koliki je njihov broj?

Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2008. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/234.[1]

A) Zadaci iz matematike

3105. Dokaži da niz brojeva $a_n = 3^n + 4$, $n \in \mathbf{N}$ ne sadrži nijedan kvadrat prirodnog broja.

3106.* Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $abc \neq 0$. Ako je

$$x = \frac{b}{c} + \frac{c}{b},\ y = \frac{c}{a} + \frac{a}{c},\ z = \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

dokaži

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4.$$

3107. Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$(x-2005)(x-2006)(x-2007)(x-2008) = 3024.$$

3108.* Za pozitivne realne brojeve x, y, z dokaži nejednakosti:

a) $\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x + y)$;

b)

$$\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{zx} \geq \sqrt{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

3109. U decimalnom zapisu broja $(5 + \sqrt{26})^n$ odredi prvih n znamenaka poslije decimalne točke.

3110. Odredi cjelobrojno rješenje jednadžbe

$$\lfloor \sqrt[3]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[3]{x^3 - 1} \rfloor = 400.$$

($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

3111. Ako je zbroj cijelih brojeva a, b, c jednak 0, dokaži da je $2(a^2 + b^2 + c^2)$ kvadrat cijelog broja.

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

3112. Točka D je nožište visine spuštene iz vrha A na krak $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC. Ako je $|AC| + |CD| = 2(|AB| + |BD|)$, koliki su njegovi kutovi?

3113. Ako su α, β, γ kutovi šiljastokutnog trokuta, dokaži da vrijedi nejednakost

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma).$$

3114. Kompleksni brojevi zadovoljavaju ove uvjete:

$$z_1 + z_2 = -i - 1,$$
$$z_1 \cdot z_2 = -i.$$

Ne računajući z_1 i z_2, odredite $z_1 \cdot \overline{z}_2$.

3115. Dokaži da za $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

3116. Koliko se najviše lovaca može postaviti na šahovsku ploču $n \times n$ tako da se nikoja dva ne napadaju.

3117. Nađi vjerojatnost da slučajno izabrani dvoznamenkasti broj bude djeljiv barem ili s 3 ili sa 7.

3118. Nađi sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1},$$

gdje je $a > 1$.

B) Zadaci iz fizike

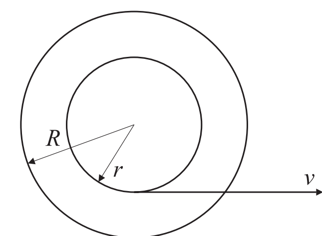
OŠ – 278. Lukina baka stanuje na četvrtom katu. Visinska razlika između katova je 3 metra. Luka je izmjerio da lift putuje do četvrtog kata 12 sekundi. Snaga elektromotora koji pokreće kabinu lifta je 6 kW. Kolika je korisnost motora ako je masa kabine, zajedno s ljudima u njoj, 500 kg?

OŠ – 279. Napravi njihalo od konca i utega proizvoljne mase. Odredi period takvog njihala za duljine konca 10, 20, 30, 40 i 50 cm. Nacrtaj dijagram koji prikazuje ovisnost perioda njihala o duljini konca. Je li ta ovisnost linearna?

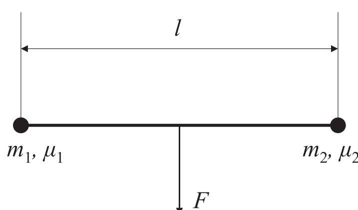
OŠ – 280. Stolica ima četiri noge kvadratnog presjeka. Njihova je debljina 2 cm. Masa stolice je 4 kilograma. Kolika bi trebala biti masa čovjeka koji bi sjeo na tu stolicu da tlak pod njenim nogama iznosi 0.5 MPa?

OŠ – 281. Keopsova piramida je najstarije od sedam starih svjetskih čuda. Sagrađena je oko 2560 g.p.n.e. To je najveća i najteža građevina ikad sagrađena na Zemlji. Sagrađena je od 2 300 000 kamenih blokova prosječne mase 2.5 tona. Sad je visoka 135.75 metara, a duljina stranica osnovice iznosi 229 metara. Izračunaj koliki postotak u ukupnom volumenu piramide otpada na kamen, a koji na prostorije i hodnike. Gustoća kamena krečnjaka od kojeg su isklesani blokovi iznosi $2600\ \mathrm{kg/m^3}$.

1392. Konac namotan na kalem unutarnjeg radijusa r i vanjskog R leži na horizontalnoj površini i može se kotrljati bez klizanja. Kolikom brzinom i u kojem smjeru će se kalem gibati ako se kraj konca povlači brzinom v kao na slici?



1393. Dva tijela masa m_1 i m_2 spojena su krutom šipkom duljine l i postavljena na horizontalnu podlogu. Koeficijenti trenja između tijela i podloge su μ_1 i μ_2. Šipka je zanemarive mase dok su tijela zanemarivo malenih dimenzija u odnosu na duljinu šipke. U središtu šipke djeluje sila iznosa F okomito na nju i paralelno s horizontalnom podlogom kao na slici. Koliki mora biti iznos te sile da bi šipka ostala okomita na smjer sile?



1394. Dijete mase m njiše se na njihaljci duljine l s kutom maksimalnog otklona od ravnotežnog položaja α. Dijete viče i time proizvodi zvuk frekvencije f. Koji raspon frekvencija čuje roditelj koji stoji ispred njihaljke daleko u odnosu na svoju visinu?

1395. Dokažite da je za sferična zrcala umnožak udaljenosti predmeta i slike od žarišta uvijek jednak kvadratu žarišne duljine.

1396. Udaljenost između dvije identične metalne kuglice na kojima su različite količine naboja je 2 cm. Radijusi kuglica su mnogo manji od njihove međusobne udaljenosti. Privlačna sila između kuglica je $4 \cdot 10^{-5}$ N. Nakon što su kuglice spojene vodljivom žicom i zatim odspojene, one se međusobno odbijaju silom od $2.25 \cdot 10^{-5}$ N. Odredite početne naboje na kuglicama.

1397. Električna žarulja od 110 V i 60 W spojena je na bateriju elektromotorne sile od 120 V. Unutarnji otpor baterije je 60 Ω. Hoće li žarulja svijetliti maksimalnim intenzitetom u ovakvom spoju?

1398. Dvije identične metalne kugle zagrijavaju se tako da im se polumjer poveća za isti iznos. Jedna od njih leži na stolu, a druga je obješena o nit. Obje kugle su toplinski izolirane od stola i niti. Kojoj kugli je dovedeno više topline i zašto?

C) Rješenja iz matematike

3077. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a s je njegov poluopseg. Ako je*

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} = s,$$

dokaži da je trokut jednakostraničan.

Rješenje. Iz $\dfrac{1}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$ imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b}\\
&\quad\leqslant \frac{bc}{2\sqrt{bc}} + \frac{ca}{2\sqrt{ca}} + \frac{ab}{2\sqrt{ab}}\\
&\quad= \frac{\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}}{2}\\
&\quad\leqslant \frac{\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a+b+c}{2}.$$

Gornje nejednakosti prelaze u jednakosti samo u slučaju $b = c$, $c = a$ i $a = b$, tj.

$$a = b = c$$

i trokut je jednakostraničan.

Vedran Rafaelić (4),
Opća gimnazija, SŠ V. Gortana, Buje

3078. *Dana su tri broja: 2, 2, 2. Bilo koji broj možemo zamijeniti zbrojem drugih dvaju uvećanim za 1. Ovaj postupak možemo ponoviti po volji mnogo puta. Možemo li na taj način dobiti brojeve 2006, 2007, 2008?*

Rješenje. Gledamo djeljivost s tri u danim trojkama. Na početku sva tri broja daju ostatak 2 pri djeljenju s 3, a tako ostaje i nakon proizvoljno mnogo koraka, pa nikako ne možemo dobiti trojku 2005, 2006, 2007 u kojoj brojevi 2005 i 2007 ne daju ostatak 2 pri dijeljenju s 3.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3079. *Za koje sve cijele brojeve a jednadžba*

$$x^3 - 13x + a = 0$$

ima tri cjelobrojna rješenja.

Rješenje. Neka su x_1, x_2, x_3 rješenja dane jednadžbe. Možemo pisati

$$\begin{aligned} &x^3 - 13x + a \\ &\quad = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &\quad = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 \\ &\qquad + (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= -13, \\ x_1x_2x_3 &= -a. \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &\quad = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\ &\quad = 0^2 - 2 \cdot (-13) = 26. \end{aligned}$$

Tražimo tri kvadrata cijelih brojeva čiji zbroj je jednak 26. Dobivamo dvije trojke:

$$(0, 1, 25) \quad \text{i} \quad (1, 9, 16).$$

Ako je

$$(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (0, 1, 25)$$

tada je $(x_1, x_2, x_3) = (0, \pm 1, \pm 5)$, ali to ne zadovoljava jednadžbu $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Za

$$(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (1, 9, 16)$$

imamo

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, -4)$$

ili

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, -3, 4).$$

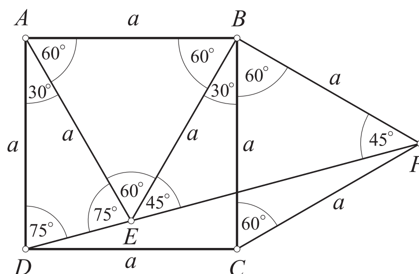
Prema tome postoje dva broja:

$$a = 12, \quad a = -12.$$

Vedran Rafaelić (4), Buje

3080. *Kvadratu $ABCD$ konstruiran je jednakostraničan trokut ABE unutar njega i jednakostraničan trokut BCF izvan njega. Dokaži da su točke D, E i F kolinearne.*

Rješenje.



$$\sphericalangle DAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Nadalje $a = |AD| = |AE|$ tj. $\triangle DAE$ je jednakokračan, tj.

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ. \quad (*)$$

Zatim

$$\sphericalangle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\Longrightarrow \quad \sphericalangle EBF = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

$a = |EB| = |BF|$, pa je $\triangle EBF$ jednakokračan, tj.

$$\sphericalangle BEF = \sphericalangle BFE = 45^\circ. \qquad (**)$$

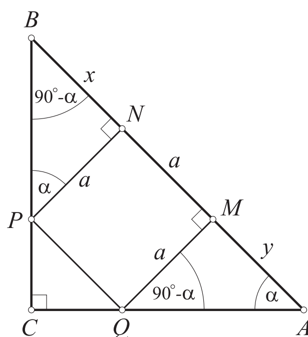
Iz $(*)$ i $(**)$ imamo:

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DEA + \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEF$$
$$= 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ.$$

Edin Ajanović (3),
Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH

3081. *Kvadrat MNPQ upisan je u pravokutan trokut ABC, tako da mu stranica $\overline{MN}$ leži na hipotenuzi $\overline{AB}$ trokuta. Dokaži da je $|AB| \geq 3|MN|$. Kada vrijedi jednakost?*

Rješenje. Označimo kao na slici.



Iz sličnosti trokuta QAM i BPN imamo: $\frac{x}{a} = \frac{a}{y}$ i sada je

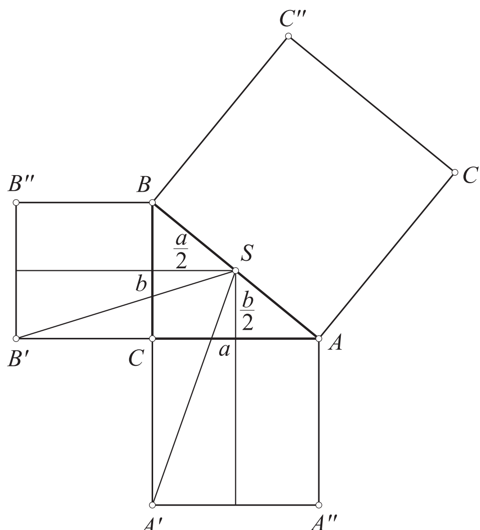
$$|AB| = x + a + y = \frac{a^2}{y} + a + y \overset{A-G}{\geqslant} 3\sqrt[3]{a^3} = 3a,$$

gdje jednakost vrijedi samo ako je $x = y = a$. Iz trokuta QAM i jednakosti $a = y$ imamo $\alpha = 45^\circ$, a trokut ABC je jednakokračan. Vidimo da i točke N i M dijele hipotenuzu na tri jednaka dijela.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3082. *Na stranicama pravokutnog trokuta konstruirani su kvadrati. Njihovih šest vrhova, koji nisu vrhovi trokuta, leže na istoj kružnici. Dokaži da je trokut jednakokračan.*

Rješenje. Označimo kao na slici. Ako su $\overline{A'A''}$ i $\overline{B'B''}$ tetive iste kružnice onda se okomice na njihova polovišta sijeku u središtu te kružnice. To središte je polovište hipotenuze $\overline{AB}$.



Imamo

$$|SA'| = |SB'| = r,$$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}+b\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}+a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 = b^2 \quad \text{tj.} \quad a = b,$$

pa je trokut jednakokračan.

Napomena. Sada imamo

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{10};$$

$$|SC'| = \sqrt{|AS|^2 + |AC'|^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a}{2}\sqrt{10} = r,$$

pa i točke C', C'' također leže na toj kružnici kao po uvjetu zadatka.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3083. *Dokaži da u svakom trokutu vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{v_a^2} + \frac{1}{v_b^2} + \frac{1}{v_c^2} \geq \frac{1}{3r^2},$$

gdje su v_a, v_b, v_c njegove visine, a r polumjer upisane mu kružnice.

Rješenje. Znamo da vrijedi:

$$v_a=\frac{2P}{a},\quad v_b=\frac{2P}{b},\quad v_c=\frac{2P}{c},$$

$$r=\frac{P}{s}=\frac{2P}{a+b+c}\quad (P \text{ je površina trokuta}).$$

Unesemo li te veze u polaznu nejednakost dobivamo

$$\frac{1}{4P^2}(a^2+b^2+c^2)\geqslant\frac{1}{12P^2}(a+b+c)^2,$$
$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2,$$
$$2a^2+2b^2+2c^2\geqslant 2ab+2bc+2ac.$$

Time dolazimo do očigledne nejednakosti

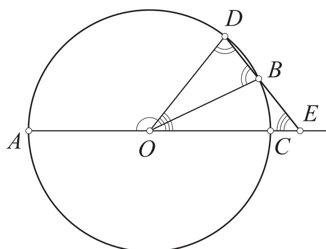
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0,$$

čime je tvrdnja dokazana.

Vanja Ubović (2), Gimnazija P. Preradovića, Virovitica

3084. *Promjer kružnice sa središtem O, polumjera r, je $\overline{AC}$. Na kružnici su dane točke B i D, takve da je sjecište pravaca AC i BD točka E, te $|ED|=r$. Dokaži da je $\sphericalangle AOB=3\sphericalangle DEC$.*

Rješenje.



Imamo

$$\sphericalangle ODE=180^\circ-2\sphericalangle DEC,$$
$$\sphericalangle OBE=180^\circ-\sphericalangle DBO$$
$$=180^\circ-(180^\circ-2\sphericalangle DEC)=2\sphericalangle DEC,$$
$$\sphericalangle BOE=180^\circ-\sphericalangle OBE-\sphericalangle DEC$$
$$=180^\circ-3\sphericalangle DEC,$$
$$\sphericalangle AOB=180^\circ-\sphericalangle BOE=3\sphericalangle DEC,$$

što je trebalo dokazati.

Vedran Rafaelić (4), Buje

3085. *Dokaži da za svake brojeve a, b, $c\in\langle 1,\infty\rangle$ vrijedi nejednakost*

$$a^{\sqrt{\log_a b}+\sqrt{\log_a c}}+b^{\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_b c}}+c^{\sqrt{\log_c a}+\sqrt{\log_c b}}\leq ab+bc+ca.$$

Prvo rješenje.

$$\sqrt{\log_a b}+\sqrt{\log_a c}\overset{(1)}{\leqslant}2\sqrt{\frac{\log_a b+\log_a c}{2}}=\sqrt{2\log_a bc}\overset{(2)}{\leqslant}\frac{2+\log_a bc}{2}=1+\log_a\sqrt{bc}.$$

Jednakost u (1) vrijedi samo ako je $\sqrt{\log_a b}=\sqrt{\log_a c}$ tj. $b=c$. Jednakost u (2) vrijedi samo ako je $2=\log_a bc$, a uz $b=c$, samo ako je $a=b=c$.

Sada imamo:

$$a^{\sqrt{\log_a b}+\sqrt{\log_a c}}+b^{\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_b c}}+c^{\sqrt{\log_c a}+\sqrt{\log_c b}}$$
$$\leqslant a^{1+\log_a\sqrt{bc}}+b^{1+\log_b\sqrt{ac}}+c^{1+\log_c\sqrt{ab}}$$
$$=a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$$
$$\overset{(3)}{\leqslant}a\cdot\frac{b+c}{2}+b\cdot\frac{a+c}{2}+c\cdot\frac{a+b}{2}$$
$$=ab+bc+ac.$$

Jednakost u (3) vrijedi samo za $a=b=c$, pa iz (1), (2), (3) imamo da ukupna jednakost vrijedi samo za $a=b=c$.

Vedran Rafaelić (4), Buje

Drugo rješenje. Primijetimo da za neki $x,y,z\in\langle 1,\infty\rangle$ vrijedi:

$$x^{\sqrt{\log_x y}+\sqrt{\log_x z}}=x^{\sqrt{\log_x y}}\cdot x^{\sqrt{\log_x z}}=\left(x^{\log_x y}\right)^{\frac12}\cdot\left(x^{\log_x z}\right)^{\frac12}=y^{\frac12}\cdot z^{\frac12}=\sqrt{yz}.$$

Sada polaznu nejednakost možemo zapisati ovako:

$$\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\leqslant ab+bc+ca,$$

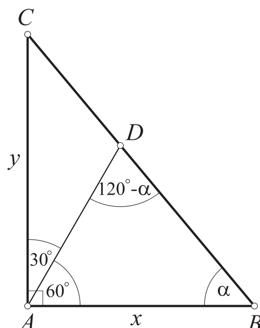
što očito vrijedi.

Mario Berljafa (4), Tehnička škola Pula, Pula

3086. *Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom u vrhu A. S x i y su označene duljine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Neka je D točka na $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle DAC = 30°$. Odredi $|AD|$ u zavisnosti od x i y.*

Rješenje.

Označimo kao na slici.



Imamo
$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Po sinusovom poučku iz trokuta *ABD* imamo:
$$\frac{|AD|}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin(120° - \alpha)} = \frac{x}{\sin 120° \cos\alpha - \sin\alpha\cos 120°} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha},$$
$$\frac{|AD|}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}},$$
$$\frac{|AD|}{y} = \frac{2x}{\sqrt{3}x+y}, \quad \text{tj.} \quad |AD| = \frac{2xy}{\sqrt{3}x+y}.$$

Vedran Rafaelić (4), Buje

3087. *Odredi maksimalnu i minimalnu vrijednost izraza*
$$\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} + \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta},$$
gdje su a i b zadani brojevi.

Rješenje. 1° Na osnovu $A_2 \leqslant K_2$, imamo:
$$\frac{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}{2}$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{2}}$$
$$\iff I \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)},$$
gdje je
$$I = \sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$
tj.
$$I_{\max} = \sqrt{2(a^2+b^2)}$$
za $|a| \neq |b|$, imamo:
$$\sin^2\theta = \cos^2\theta \implies \operatorname{tg}\theta = \pm 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbf{Z}.$$
Za $|a| = |b|$ $I_{\max} = 2|a|$.

2° Imamo:
$$I = \sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta}+\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}$$
$$I^2 = a^2+b^2 +2\sqrt{[a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta][b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta]}$$
$$= a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2+(a^2-b^2)^2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}$$
$$= a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2+(a^2-b^2)^2\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}$$
$$\geqslant a^2+b^2+2|ab| = (|a|+|b|)^2 \ / \ \sqrt{}$$
$$\implies I \geqslant |a|+|b| \implies I_{\min} = |a|+|b|,$$
za $\sin^2 2\theta = 0 \implies 2\theta = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle,
$$|a|+|b| \leqslant I \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Edin Ajanović (3), Sarajevo

3088. *Koliko je*
$$\cos\frac{\pi}{11} - \cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} - \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11}?$$

Prvo rješenje. Neka je $z = \cos\frac{\pi}{11} + i\sin\frac{\pi}{11}$, tada je:
$$\cos\frac{\pi}{11} = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \cos\frac{2\pi}{11} = \frac{z^4+1}{2z^2},$$
$$\cos\frac{3\pi}{11} = \frac{z^6+1}{2z^3}, \qquad \cos\frac{4\pi}{11} = \frac{z^8+1}{2z^4},$$
$$\cos\frac{5\pi}{11} = \frac{z^{10}+1}{2z^5}.$$
$$S = \frac{z^2+1}{2z} - \frac{z^4+1}{2z^2} + \frac{z^6+1}{2z^3} + \frac{z^8+1}{2z^4} + \frac{z^{10}+1}{2z^5}$$

$$= \frac{z^4(z^2+1)-z^3(z^4+1)+z^2(z^6+1)}{2z^5} + \frac{-z(z^8+1)+z^{10}+1}{2z^5}$$

$$= \frac{z^{10}-z^9+z^8-z^7+z^6-z^5}{2z^5} + \frac{+z^4-z^3+z^2-z+1+z^5}{2z^5}$$

$$= \frac{\frac{z^{11}+1}{z+1}+z^5}{2z^5} \quad \text{(geometrijski niz).}$$

Po Moivreovoj formuli, imamo:

$$z^{11} = \cos\frac{\pi}{11}\cdot 11 + i\sin\frac{\pi}{11}\cdot 11$$

$$\Longrightarrow\ S = \frac{\frac{-1+1}{z+1}+z^5}{2z^5} = \frac{1}{2}.$$

Drugo rješenje. Neka je

$$P=\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}.$$

Imamo

$$2\sin\frac{\pi}{11}\cdot P$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{\pi}{11}$$

$$-2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11}$$

$$-2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{4\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$=\sin\frac{2\pi}{11}-\left(\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{\pi}{11}\right)$$

$$+\left(\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11}\right)-\left(\sin\frac{5\pi}{11}-\sin\frac{3\pi}{11}\right)$$

$$+\left(\sin\frac{6\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{11}-\sin\frac{5\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}$$

$$=\sin\frac{\pi}{11}$$

$$\Longrightarrow\ P=\frac{1}{2}.$$

Edin Ajanović (3), Sarajevo

Treće rješenje. Izraz možemo zapisati kao

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=S.$$

Ako je $z=\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}$ imamo:

$$S=\operatorname{Re}(z+z^3+z^5+z^7+z^9).$$

Ako je $Z=z+z^3+z^5+z^7+z^9$ imamo:

$$z^2(Z-z^9)=z^3+z^5+z^7+z^9=Z-z,$$

pa sređivanje daje:

$$Z=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}.$$

Sada je:

$$S=\operatorname{Re}\left(\frac{z^{11}-z}{z^2-1}\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left(\frac{-1-z}{z^2-1}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}}\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{11}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{11}}\right)$$

$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}}{2-2\cos\frac{\pi}{11}}=\frac{1}{2}.$$

Vedran Rafaelić (4), Buje

3089. *U sferu polumjera R upisana je pravilna četverostrana piramida, čiji je ravninski kut u vrhu jednak γ. Odredi površinu bočne plohe piramide. Za koji kut γ je ta površina najveća?*

Rješenje. Neka je duljina brida osnovice piramide a, tj.

$$|AB|=|BC|=|CD|=|AD|=a.$$

Iz $\triangle KSC$ $(SK\perp KC)$:

$$|KC|=\frac{a}{2};$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{|KC|}{|SC|}\ \Longrightarrow\ |SC|=\frac{a}{2\sin\frac{\gamma}{2}}. \qquad (1)$$

Kako je

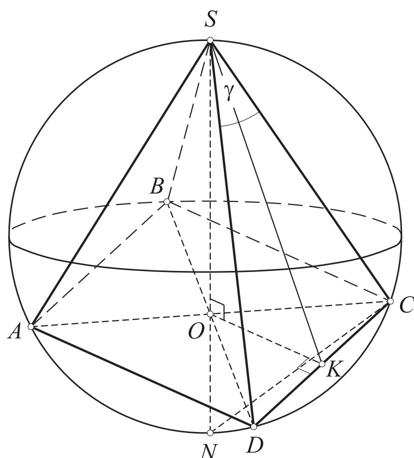
$$|OC|=\frac{|AC|}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad (2)$$

imamo iz $\triangle SOC$:

$$|OS|^2 = |SC|^2 - |OC|^2$$

$$\Longrightarrow |OS| \overset{(1),(2)}{=} \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\gamma}{2}} - \frac{a^2}{2}}$$

$$\Longrightarrow |OS| = \frac{a}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\cos\gamma}. \qquad (3)$$



$\triangle SNC$ je pravokutan ($|SN|=2R$, $\sphericalangle SCN=90^\circ$) i odavde

$$|SC|^2 = |SN| \cdot |OS|$$

$$\Longrightarrow |OS| = \frac{|SC|^2}{|SN|} \overset{(1)}{=} \frac{a^2}{8R\sin^2\frac{\gamma}{2}}. \qquad (4)$$

Imamo iz (3) i (4):

$$a = 4R\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\cos\gamma}. \qquad (5)$$

Bočna visina iznosi:

$$|SK| = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}} \overset{(5)}{=} \frac{4R\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\cos\gamma}}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}}$$

$$\Longrightarrow |SK| = 2R\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{\cos\gamma} \qquad (6)$$

Površina bočne plohe (omotača) piramide je:

$$M = 4 \cdot \frac{a|SK|}{2} = 2a|SK|$$

$$\overset{(5),(6)}{=} 16R^2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\gamma$$

$$= 8R^2\sin\gamma\cos\gamma = 4R^2\sin2\gamma$$

$M_{\max} = 4R^2$ za $\sin 2\gamma = 1$ tj. $2\gamma = 90^\circ$ ili $\gamma = 45^\circ$.

Edin Ajanović (3), Sarajevo

3090. *Koliko puta treba baciti kocku da vjerojatnost da će se barem jedanput pojaviti šestica, bude veća od* $\frac{1}{2}$ *?*

Prvo rješenje. Ukoliko bacimo kocku jednom, vjerojatnost da dobijemo šesticu bit će:

$$P(1) = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}.$$

Koristit ćemo formulu za vjerojatnost zbroja dvaju događaja koji se međusobno ne isključuju. Dakle, vjerojatnost da dobijemo šesticu ako kocku bacamo dva puta, bit će:

$$\begin{aligned} P(2) &= P(1) + P(1) - P(1)P(1) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{11}{36} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ukoliko je bacimo tri puta bit će:

$$P(3) = P(2) + P(1) - P(2)P(1) = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}.$$

Ukoliko je bacimo četiri puta bit će:

$$P(4) = P(3) + P(1) - P(3)P(1) = \frac{671}{1293} > \frac{1}{2}.$$

Da bi vjerojatnost da se šestica pojavi barem jednom, bila veća od $\frac{1}{2}$, kocku treba baciti barem četiri puta.

Mario Berljafa (4), Pula

Drugo rješenje. Ako je v_n vjerojatnost pojavljivanja šestice barem jedanput u n bacanja, a $\overline{v_n}$ vjerojatnost da ne dobijemo šesticu ni u jednom bacanju, imamo:

$$v_n = 1 - \overline{v_n}, \qquad \overline{v_n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

$$v_n > 0.5, \text{ pa je: } v_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.5$$

$$\Longrightarrow 0.5 > \left(\frac{5}{6}\right)^n \Longrightarrow \log 0.5 > n\log\frac{5}{6}$$

$$\Longrightarrow \frac{\log 0.5}{\log\frac{5}{6}} < n \Longrightarrow n > 3.80178\ldots$$

tj. najmanji broj bacanja jest 4.

Vedran Rafaelić (4), Buje

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 270. *Sara je za rođendan dobila zlatnu ogrlicu. U učionici za fiziku je izmjerila da je njena masa 30 grama, a obujam 2 cm^3. Odredite je li ogrlica od 18-karatnog ili 14-karatnog zlata. 18-karatno zlato sadrži 75% zlata, a 14-karatno 58.5%. Ostalo je bakar. Gustoća zlata je 19 300 kg/m^3, a bakra 8 900 kg/m^3.*

Rješenje.

$$m = 30 \text{ g}$$
$$\underline{V = 2 \text{ cm}^3}$$

Gustoća 18-karatnog zlata iznosi:

$$0.75 \cdot 19\,300 + 0.25 \cdot 8900 = 16\,700 \text{ kg/ m}^3,$$

a gustoća 14-karatnog zlata iznosi:

$$0.585 \cdot 19\,300 + 0.415 \cdot 8900 = 14\,984 \text{ kg/ m}^3,$$

$$\rho_{\text{ogrlice}} = \frac{m}{V} = \frac{30 \text{ g}}{2 \text{ cm}^3} = 15 \text{ g/ cm}^3 = 15\,000 \text{ kg/ m}^3.$$

Dakle, ogrlica je od 14-karatnog zlata.

Ur.

OŠ – 271. *Ivan priprema kupku tako da miješa vruću vodu temperature $60\,^\circ C$ i hladnu vodu temperature $14\,^\circ C$. Dobio je 80 litara vode temperature $44\,^\circ C$. Koliko je stavio hladne, a koliko vruće vode?*

Rješenje.

$$t_2 = 60^\circ\text{C}$$
$$t_1 = 14^\circ\text{C}$$
$$\tau = 44^\circ\text{C}$$
$$V_1 + V_2 = 80 \text{ l}$$
$$m_1 + m_2 = 80 \text{ kg}$$
$$\underline{c_1 = c_2}$$
$$m_1,\ m_2 = ?$$
$$m_1 \cdot c_1 \cdot \Delta t_1 = m_2 \cdot c_2 \cdot \Delta t_2$$
$$m_1 \cdot c_1 \cdot (\tau - t_1) = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - \tau)$$

Uz $c_1 = c_2$ slijedi:

$$m_1 = m_2 \frac{t_2 - \tau}{\tau - t_1}.$$

Kad uvrstimo temperature, dobije se

$$m_1 = m_2 \cdot \frac{16}{30} = m_2 \cdot \frac{8}{15}.$$

Ako uvrstimo u prethodnu jednadžbu da je $m_2 = 80 - m_1$ dobijemo:

$$m_1 = (80 - m_1) \cdot \frac{8}{15} \Big/ \cdot 15$$
$$15m_1 = 640 - 8m_1$$
$$23m_1 = 640$$
$$m_1 = \frac{640}{23} = 27.8 \text{ kg}$$
$$m_2 = 80 - 27.8 = 52.2 \text{ kg}$$

Ivan Kulušić (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 272. *Pizzerija u svojoj ponudi nudi pizzu u dvije veličine. Manja ima promjer 25 cm i cijenu od 25 kuna, a veća ima promjer 35 cm i košta 45 kuna. Debljina im je jednaka. Koja pizza ima bolji odnos cijene i količine?*

Rješenje.

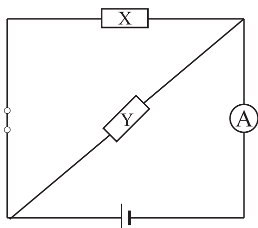
$$d_1 = 25 \text{ cm}$$
$$c_1 = 25 \text{ kn}$$
$$d_2 = 35 \text{ cm}$$
$$\underline{c_2 = 45 \text{ kn}}$$
$$\frac{\text{cijena}}{\text{količina } (V)} = ?$$

$$V_1 = r_1^2 \cdot \pi \cdot h = (12.5 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot h = 156.25\pi h$$
$$V_2 = r_2^2 \cdot \pi \cdot h = (17.5 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot h = 306.25\pi h$$
$$\frac{25 \text{ kn}}{156.25\pi h} = 0.16 \frac{\text{kn}}{\pi h}$$
$$\frac{45 \text{ kn}}{306.25\pi h} = 0.147 \frac{\text{kn}}{\pi h}$$

Bolji odnos ima veća pizza jer je omjer cijene i količine manji.

Ivan Kulušić (8), Šibenik

OŠ – 273. *Izvor struje u strujnom krugu na slici ima napon 6 V. Kad je prekidač zatvoren ampermetar pokazuje vrijednost struje 500 mA. Koliko će ovaj pokazivati kada prekidač bude otvoren? Vrijednost otpora X iznosi 20 Ω.*



Rješenje.

$R_x = 20\ \Omega$

$U = 6$ V

$I_1 = 500$ mA

$I_2 = ?$

Kad je prekidač zatvoren vrijedi:

$$R = \frac{U}{I} = 12\ \Omega$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5-3}{60} = \frac{1}{30}$$

$$R_y = 30\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 0.2 \text{ A} = 200 \text{ mA}.$$

Ampermetar će pokazivati 200 mA.

Ivan Kulušić (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

1378. *Dva identična auta ulaze u zavoj od 90° paralelno jedan s drugim. Ako se auto koji ide unutarnjom stranom zavoja giba kružnicom radijusa 28 m, a onaj drugi po kružnici radijusa 32 m, te uz pretpostavku da je koeficijent trenja okomit na smjer gibanja jednak za oba automobila i iznosi 1, kolike su maksimalne brzine koje auti mogu održati u zavoju? Koji će auto prije prijeći zavoj?*

Rješenje.

$r_1 = 28$ m

$r_2 = 32$ m

$\mu = 1$

$v_1,\ v_2 = ?$

Da bi se automobili mogli gibati po kružnicama zadanih radijusa, komponenta sile trenja usmjerena prema središtu zakrivljenosti zavoja djeluje kao centripetalna sila i za brzinu vrijedi uvjet:

$$\frac{mv^2}{r} \leqslant \mu mg.$$

Iznos maksimalne brzine prvog automobila je:

$$v_1 = \sqrt{\mu g r_1} = 16.57\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a drugog:

$$v_2 = \sqrt{\mu g r_2} = 17.71\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vrijeme koje je potrebno da prvi automobil prijeđe zadani put $\frac{2r_1\pi}{4}$ je:

$$t_1 = \frac{r_1\pi}{2v_1} = 2.65 \text{ s},$$

a drugi:

$$t_2 = \frac{r_2\pi}{2v_2} = 2.83 \text{ s}.$$

Automobil koji se giba po kružnici radijusa 28 m prije će prijeći zavoj.

Vanja Ubović (2), Virovitica

1379. *Zamislimo dva topa mase 1 t, jedan ukopan u zemlju, a drugi na površini (trenje zanemarite). Ispaljuju granate mase 50 kg relativne brzine prema topu 900 km/h. Kolika je razlika u dometu granata ako je cijev topa pod kutem 30° prema površini?*

Rješenje.

$M = 1 \text{ t} = 10^3$ kg

$m = 50$ kg

$v = 900 \text{ km/h} = 250 \text{ m/s}$

$\alpha = 30°$

$\Delta d = ?$

Top koji je ukopan u zemlju nakon ispaljivanja granate se ne giba pa je relativna brzina granate prema topu jednaka brzini granate prema zemlji.

Tada za domet vrijedi:

$$d_1 = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha = 5517 \text{ m}.$$

Za top koji nije ukopan u zemlju prema zakonu očuvanja impulsa vrijedi:

$$Mv_1 - mv_{2h} = 0,$$

gdje je v_{2h} horizontalna komponenta brzine granate prema zemlji jer se top može gibati samo horizontalno po površini.

Kako je v relativna brzina granate prema topu u smjeru cijevi, vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{v_{2v}}{v}, \qquad \cos\alpha = \frac{v_1 + v_{2h}}{v},$$

gdje su v_{2v} i $v_1 + v_{2h}$ vertikalna i horizontalna komponenta granate prema topu. Domet granate u ovom slučaju je:

$$d_2 = 2\cdot\frac{v_{2v}}{g}\cdot v_{2h} = \frac{1}{\frac{m}{M}+1}\frac{v^2}{g}\sin 2\alpha = 5254 \text{ m}.$$

Za razliku dometa vrijedi:

$$\Delta d = d_1 - d_2 = 263 \text{ m}.$$

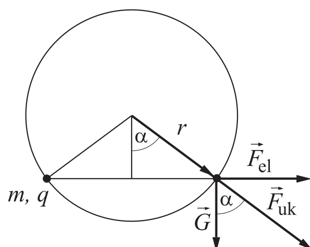
Granata iz topa ukopanog u zemlju ima za 263 m veći domet.

Gabrijel Guberović (3), Nova Gradiška

1380. *Dva točkasta tijela mase 1 g i naboja 1 μC mogu se gibati po kružnici radijusa 10 cm u ravnini okomitoj na površinu Zemlje. Nađite ravnotežni položaj.*

Rješenje.

$$m = 1 \text{ g}$$
$$q = 1\ \mu\text{C}$$
$$\underline{r = 10 \text{ cm}}$$
$$\alpha = ?$$



Na tijela u ravnoteži djeluju sile kao na slici. Kako se tijela mogu gibati samo po kružnici, tangencijalna komponenta ukupne sile mora biti jednaka nuli, odnosno ukupna sila treba djelovati radijalno. Prema tome, za iznose sile teže i električne sile između naboja vrijedi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{el}}{G},$$

gdje je

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2r\sin\alpha)^2} \quad \text{i} \quad G = mg.$$

Iz toga proizlazi za ravnotežni kut α:

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2 mg} = 91.74.$$

Kako je $\sin\alpha \leqslant 1$, proizlazi da je $\cos\alpha \leqslant 0.0109$, odnosno $\alpha \geqslant 89.375^\circ$. Pošto kut α ne može biti veći od 90° (vidi sliku), na ovaj način je ravnotežni kut određen s preciznošću od 0.4°.

Po volji precizno rješenje može se odrediti iterativno:

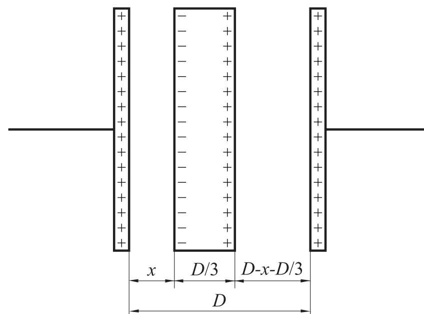
$$\cos\alpha_{i+1} = \frac{\sin^3\alpha_i}{91.74}.$$

Početna vrijednost je $\alpha_0 = 90^\circ$, a svaka sljedeća α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ je sve bliža točnom rješenju.

Ur.

1381. *Unutar pločastog kondenzatora stavimo metalnu pločicu debljine $d = \frac{D}{3}$ gdje je D razmak između ploča kondenzatora. Za koliko se promijeni kapacitet kondenzatora? Može li se takav kondenzator prepoznati kao dva kondenzatora spojena u seriju?*

Rješenje. Na stranicama umetnute metalne pločice unutar nabijenog kondenzatora inducira se naboj kao na slici da bi električno polje unutar metalne počice bilo jednako nuli. Ako električno polje unutar metala ne bi iščezavalo, slobodni elektroni bi se gibali. Ovakav sustav vodiča može se prepoznati kao serijski spoj dvaju kondenzatora i upravo to će nam poslužiti za izračunavanje promjene kapaciteta kondenzatora.



Kapacitet prije umetanja metalne pločice je C_1, a nakon umetanja bit će C_2. Tada vrijedi:

$$C_1 = \varepsilon \frac{S}{d},$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{21}} + \frac{1}{C_{22}} \implies$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon \frac{S}{x}} + \frac{1}{\varepsilon \frac{S}{D - x - \frac{D}{3}}} \right)^{-1} = \frac{3}{2} \varepsilon \frac{S}{d}.$$

Vidimo da se kapacitet kondenzatora povećao za 50%.

Mario Berljafa (4), Pula

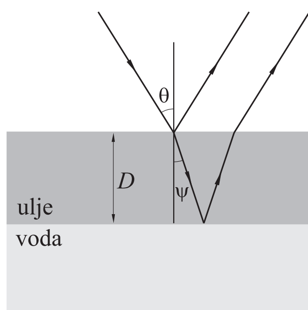
1382. *U bazenu površine 20 m^2 razliveno je 0.01 dl ulja indeksa loma 1.32. Pod kojim kutom se vidi maksimum svjetlosti valne duljine 600 nm?*

Rješenje.

$$S = 20 \text{ m}^2$$
$$V = 0.01 \text{ dl}$$
$$n = 1.32$$
$$\underline{\lambda = 600 \text{ nm}}$$
$$\theta = ?$$

Debljina sloja ulja je:

$$d = \frac{V}{S} = 50 \text{ nm}.$$



Na gornjoj i donjoj površini sloja ulja zraka svjetlosti se reflektira s istim pomakom u optičkom putu od $\frac{\lambda}{2}$ jer svjetlost dolazi iz sredstva s manjim indeksom loma u sredstvo s većim. Za maksimum interferencije vrijedi:

$$2dn \cos \psi = k\lambda,$$

gdje je k redni broj maksimuma interferencije, a ψ kut loma:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \psi} = n.$$

Za kut loma dobijemo:

$$\cos \psi = \frac{k\lambda}{2dn} = k \cdot 4.5 > 1,$$

što znači da maksimum interferencije ne postoji.

Ur.

1383. *Komad drva dimenzija 10 cm × 20 cm × 20 cm gustoće 860 kg/m^3 pluta u vodi tako da mu je ploha 20 cm × 20 cm paralelna s površinom vode. Komad je malo potopljen i pušten da titra. Kolika je frekvencija titranja?*

Rješenje.

$$d = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$
$$a = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$
$$\rho = 860 \text{ kg/ m}^3$$
$$\underline{S = 400 \text{ cm}^2 = 0.04 \text{ m}^2}$$
$$f = ?$$

Za masu drveta vrijedi $m = V\rho = 3.44$ kg.

Promatrajmo ravnotežni položaj. Tu za silu težu i uzgon vrijedi:

$$F_g = F_u$$
$$mg = \rho_{\text{voda}} g V_1 = \rho_{\text{voda}} g S h.$$

Dubina do koje je drvo uronjeno u vodu je prema tome:

$$h = \frac{m}{\rho_{\text{voda}} S} = 8.6 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Sila koja djeluje na tijelo kad je pomaknuto za duljinu A iz ravnoteže je:

$$F_{\text{el}} = F_g - F_u = mg - \rho_{\text{voda}} g S(h + x)$$
$$= -\rho_{\text{voda}} g S x,$$

što je ekvivalentno titranju tijela na opruzi konstante

$$k = \rho_{\text{voda}} g S = 392.4 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Za frekvenciju titranja stoga vrijedi:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.7 \text{ Hz}.$$

Gabrijel Guberović (3), Nova Gradiška

1384. *Uska cilindrična cijev duljine 80 cm i otvorena na oba kraja potopljena je do pola u živu gustoće 13.6 g/cm^3. Tada je cijev začepljena na gornjoj strani i izvađena iz žive. Duljina stupca žive koji je ostao u cijevi je 22 cm. Koliki je atmosferski tlak?*

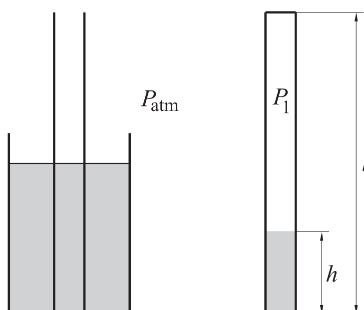
Rješenje.

$l = 80$ cm $= 0.8$ m

$\rho_{\mathrm{Hg}} = 13.6$ g/cm^3 $= 13\,600$ kg/m^3

$h = 22$ cm $= 0.22$ m

$P_{\mathrm{atm}} = ?$



Za ravnotežno stanje tlakova vrijedi $P_{\mathrm{atm}} = P_{\mathrm{Hg}} + P_1$. Budući da je temperatura konstantna, promjena stanja plina u cilindričnoj cijevi opisuje Boyle-Mariotteov zakon:

$$P_{\mathrm{atm}} V_0 = P_1 V_1$$

$$P_{\mathrm{atm}} \frac{l}{2} S = P_1 (l-h) S \implies P_1 = \frac{P_{\mathrm{atm}} l}{2(l-h)}.$$

Sada vrijedi:

$$P_{\mathrm{atm}} = P_{\mathrm{Hg}} hg + \frac{l}{2(l-h)} P_{\mathrm{atm}}$$

$$P_{\mathrm{atm}} = \frac{2P_{\mathrm{Hg}} hg(l-h)}{l-2h} = 94.6 \text{ kPa}.$$

Gabrijel Guberović (3), Nova Gradiška

Rješenja zabavne matematike

Broj 366

Ne postoje prikazi broja 366 pomoću dvaju kvadrata!

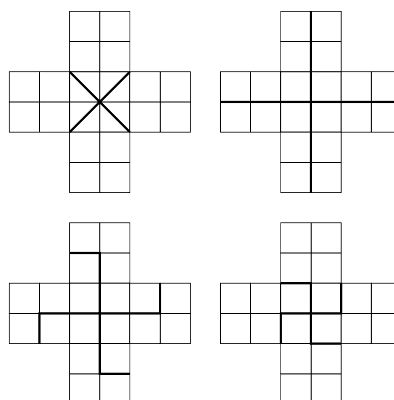
Neki prikazi broja 366 pomoću triju kvadrata: $366 = 1^2 + 2^2 + 19^2 = 1^2 + 13^2 + 14^2 = 1^2 + 39^2 - 34^2 = 1^2 + 183^2 - 182^2 = 3^2 + 19^2 - 2^2 = 3^2 + 29^2 - 22^2 = 3^2 + 61^2 - 58^2 = 3^2 + 179^2 - 178^2 = 5^2 + 21^2 - 10^2 = 7^2 + 159^2 - 158^2 = 9^2 + 17^2 - 2^2$.

Broj 2008

Od mnoštva različitih prikaza broja 2008 pomoću istih znamenki navodimo najjednostavnije: $2008 = 2222 - 222 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 333 \cdot 3 + 333 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 : 3 = 44 \cdot 44 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 + 4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 - 7 : 7 = 8888 : 8 + 888 + 8 : 8 + 8 = 999 + 999 + 9 : 9 + 9$.

Grčki križ

Tražena podjela može se načiniti na četiri bitno različita načina. Vidite crteže!

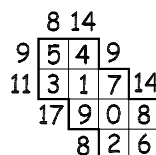


Domjenak

Između 19 sati i ponoći ima 10 vremenskih intervala od po pola sata. Promatrajući odlaske unatrag imamo sljedeće brojeve sudionika natjecanja koji su ostajali na domjenku: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. Prema tome, na početku domjenka bilo je $2^{10} = 1024$ gostiju.

Brojke i računi

Vidite crtež!





Simple groups[1]

(Pjeva se na melodiju pjesme "Sweet Betsy from Pike".)

What are the orders of all simple groups?
I speak of the honest ones, not of the loops.
It seems that old Burnside their orders has guessed
Except for the cyclic ones, even the rest.

Groups made up with permutes will produce some more:
For A_n *is simple, if* n *exceeds 4.*
Then, there was Sir Matthew who came into view
Exhibiting groups of an order quite new.

Still others have come on to study this thing.
Of Artin and Chevalley now we shall sing.
With matrices finite they made quite a list
The question is: Could there be others they've missed?

Suzuky and Ree then maintained it's the case
That these methods had not reached the end of the chase.
They wrote down some matrices, just four by four,
That made up a simple group. Why not made more?

And then came the opus of Thompson and Feit
Which shed on the problem remarkable light.
A group, when the order won't factor by two
Is cyclic or solvable. That's what is true.

Suzuky and Ree had caused eyebrows to raise,
But theoreticians they just couldn't faze.
Their groups were not new: if you added a twist,
You could get them from old ones with a flick of the wrist.

Still, some hardly souls felt a thorn in their side.
For the five groups of Mathieu all reasons defied;
Not A_n*, not twisted, and not Chevalley,*
They called them sporadic and filed them away.

[1] Ovi stihovi su nađeni na ploči u Eckhart Library u Unversity of Chicago; autor je nepoznat ili sakriven. Pjesma je objavljena u časopisu American Mathematical Monthly, **80**(9), 1973. U njoj se dvaput spominje jedan od naših, svjetski najpoznatijih matematičara, Zvonimir Janko.

Are Mathieu groups creatures of heaven or hell?
Zvonimir Janko *determined to tell.*
He found out that nobody wanted to know:
The masters had misses 1 7 5 5 6 0.

The floodgates were opened! New groups were the rage!
(And twelve or more sprouted, to greet the new age.)
By **Janko** *and Conway and Fisher and Held*
McLaughlin, Suzuki, and Higman, and Sims.

No doubt you noted the last lines don't rhyme.
Well, that is, quite simply, a sign of the time.
There's chaos, not order, among simple groups;
And maybe we'd better go back to the loops.

U ovim duhovitim, matematički vrlo sadržajnim, ali i pjesnički vješto sročenim stihovima nepoznati je autor sažeto izložio povijest istraživanja i pronalaženja takozvanih prostih konačnih grupa. Vrijedno je pritom uočiti ime svjetski poznatog matematičara Zvonimira Janka (r. 1932. u Bjelovaru), koji je studirao i doktorirao matematiku u Zagrebu, da bi ga zatim put prema značajnim matematičkim otkrićima vodio do Australije, SAD-a i napokon njemačkog sveučilišnog središta Heidelberga gdje je proveo najveći dio radnog vijeka, održavajući stalni kontakt i suradnju s hrvatskim matematičarima.



Zimska škola fizike 2008. g.

Hrvatsko fizikalno društvo – Podružnica Osijek je u suradnji sa Županijskim stručnim vijećem nastavnika fizike osnovnih škola Osječko-baranjske županije i Odjelom za fiziku, 9. veljače 2008. na Odjelu za fiziku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, organiziralo četvrtu po redu, "Zimsku školu fizike". Škola je održana pod pokroviteljstvom Osječko-baranjske županije. Program Škole obuhvatio je pet radionica u čijem radu je sudjelovalo preko 140 učenika i njihovih predmetnih nastavnika iz Osijeka i bliže okolice. Početak ovogodišnje Škole svojom nazočnošu i riječima potpore uveličali su Vinko Filipović, prof., ravnatelj Agencije za odgoj i obrazovanje i doc. dr. sc. Branko Vuković, pročelnik Odjela za fiziku Sveučilišta u Osijeku. Dok je u ime pokrovitelja sudionike Škole pozdravila gospođa Jasmina Lovrinčević.

Teme radionica i njihovi voditelji bili su: *Tlak i podtlak* (Božena Ratkaj, prof.); *Igrokaz o Nikoli Tesli* (Mirjana Javora, učitelj mentor); *Nekoliko zanimljivih pokusa s natjecanja* (Tanja Paris, prof., Marija Špiranec, prof. i Jasmina Horvatović, prof.); *Fizika u igračkama* (Vesna Špac, prof. savjetnik i Marijan Bakač, prof. savjetnik) i *"Fizika ekspres"* (studenti fizike Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu).

Interes sudionika, njihovo oduševljenje programom radionica, mogu se više nego riječima, izraziti slikama. Na unutarnjim stranama omota lista prikazani su: *Svečano otvorenje 4. zimske škole fizike* u Osijeku (vidljivo je da je učionica bila premala za sve sudionike); *Teslin transformator u pogonu* u rukama studenata PMF-a na projektu Fizika express; *Mladi Tesla leti s krova* – scena iz predstave "Nikola Tesla" OŠ "Jakšić" iz Jakšića; *Određivanje gustoće jabuke* – detalj s radionice; *Fizika u igračkama* – detalj s radionice; *Kućni gejzir s tekućim dušikom* (Fizika express); *Kako probušiti balon, a da ne pukne?*, te najupečatljivija demonstracija: *Rubensova cijev i stojni val* (Fizika express).

Ana Smontara, Zagreb

⋆ ⋆ ⋆

Kada je Uskrs?

Kako se određuje kada će biti katolički blagdan Uskrsa?

Uskrs je vezan uz solarni kalendar, točnije uz solarni ekvinocij. Po gregorijanskom kalendaru slavi se prve nedjelje poslije prvog punog mjeseca koji slijedi proljetnom ekvinociju.

Ove godine proljetni ekvinocij je bio u četvrtak 20. ožujka u 6 sati i 48 minuta, prvi puni mjesec u petak 21. ožujka i prva nedjelja poslije toga 23. ožujka. To je jedan od najranijih Uskrsa, koji inače najčešće pada u travanj i može biti čak 25. travnja.

Državno natjecanja iz fizike 2007. g.

Hrvatsko fizikalno društvo, Agencija za odgoj i obrazovanje i Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa organizirali su i prošle školske godine natjecanje iz fizike učenika osnovnih i srednjih škola.

Školska natjecanja su održana tijekom siječnja 2007. godine. Općinska natjecanja su održana 31. siječnja 2007. Zadatke je pripremilo državno povjerenstvo i elektroničkom poštom poslalo u 326 škola domaćina natjecanja. U natjecanju je sudjelovalo oko 2500 učenika. Na temelju uspjeha na općinskom natjecanju županijska povjerenstva su pozvala učenike na županijsko natjecanje koje je održano 13. ožujka 2007. I za ovu razinu natjecanja zadatke je pripremilo državno povjerenstvo. Sudjelovalo je 1433 učenika osnovnih i srednjih škola. Nakon što su županijska povjerenstva dostavila izvješća, državno povjerenstvo je uskladilo bodovanje i prema jedinstvenim listama poretka za pojedine kategorije pozvalo učenike na državno natjecanje.

Pored natjecanja u znanju koje se odvija na spomenute četiri razine (školsko, općinsko, županijsko i državno) učenici osnovnih i srednjih škola tijekom školske godine osmišljavali su i izvodili eksperimente. Autori najboljih samostalnih eksperimentalnih radova pozvani su na državnu smotru.

Državna smotra i natjecanje mladih fizičara održano je *u Primoštenu od 10. do 13. svibnja 2007.* Domaćin je bila *Osnovna škola Primošten.* Sudjelovala su 162 učenika osnovnih (70) i srednjih (92) škola te 133 nastavnika i članova državnoga povjerenstva. Sudionici su bili smješteni u hotelu Zora u Primoštenu. Na svečanom zatvaranju najboljima su dodijeljene diplome i knjige.

Nagrade su dobili učenici kako slijedi:

Osnovne škole

Boris Gardijan, OŠ Trnsko, Zagreb; *Borna Vukadinović*, OŠ Trnsko, Zagreb; *Katja Kustura*, OŠ S. Kefelje, Kutina; *Kristijan Kvaternik*, OŠ Vrbani, Zagreb (I. nagrada); *Nikola Konjušak*, OŠ B. Klaića, Bizovac; *Marko Šarlija*, OŠ K. Krstića, Zadar; *Andrijana Brkić*, OŠ Ante Kovačića, Zagreb; *Dorotej Eršek*, OŠ Eugena Kvaternika, Velika Gorica; *Nikola Štoković*, OŠ Jurja Dobrile, Rovinj (II. nagrada); *Marko Jerčić*, OŠ J. Pupačića, Omiš; *Filip Jurić*, OŠ Eugena Kumičića, Velika Gorica; *Toni Marković*, OŠ Rapska, Zagreb; *Josip Spajić*, OŠ Eugena Kvaternika, Velika Gorica; *Paula Tomić*, OŠ S. Radića, Metković; *Meri Tukač*, OŠ Breznički Hum, Breznički Hum; *Ivan Mišković*, OŠ M. Trnine, Križ; *Marko Gregurić*, II. OŠ Bjelovar, Bjelovar; *Srećko Mihaljević*, OŠ Jordanovac, Zagreb (III. nagrada).

Eksperimentalni radovi

Luka Luketin i *Zvonimir Boban*, OŠ "Dobri", Split (I. nagrada); *Tonći Mastelić* i *Zvonimir Vukojević*, OŠ "Trstenik", Split (II. nagrada); *Krešimir Tisanić*, OŠ Augusta Harambašića, Zagreb (III. nagrada).

1. grupa

Josip Grgurić, Gimnazija, Karlovac (I. nagrada); *Vilim Štih*, V. gimnazija, Zagreb; *Petar Kunštek*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Ljudevit Palle*, V. gimnazija, Zagreb; *Ante Malenica*, V. gimnazija, Zagreb; *Marija Kranjčević*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada).

2. grupa

Nina Kamčev, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Jakša Markotić*, 3. gimnazija, Split; *Petar Mlinarić*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Dražen Papišta*, SŠ Valpovo, Valpovo; *Ivan Prepolec*, V. gimnazija, Zagreb; *Ivan Domladovec*, Gimnazija L. Vranjanina, Zagreb (III. nagrada).

3. grupa

Juraj Klarić, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Mario Menix*, Gimnazija, Metković; *Marko Čolić*, III. gimnazija, Osijek (II. nagrada); *Igor Novak*, Gimnazija Čakovec, Čakovec; *Branimir Novoselnik*, III. gimnazija, Osijek; *Ivan Peris*, Gimnazija, Karlovac; *Zlatan Živković*, 3. gimnazija, Split (III. nagrada).

4. grupa

Ana Juričić, Gimnazija dr. Mate Ujevića, Imotski (I. nagrada); *Antonio Krnjak*, Gimnazija Čakovec, Čakovec; *Vanja Ivković*, III. gimnazija, Osijek (II. nagrada); *Rudolf Tretler*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka; *Saša Stanko*, V. gimnazija, Zagreb; *Mate Milas*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada).

Eksperimentalni radovi

Denis Wertheim i *Pavle Lacko*, Elektrostrojarska škola, Varaždin (I. nagrada); *Matija Bakoš* i *Denis Kovač*, Gimnazija Čakovec, Čakovec (II. nagrada); *Livija Čipčić* i *Asmira Dervišević*, MŠ Dubrovnik, Dubrovnik (III. nagrada).

Krešo Zadro, Zagreb

⋆ ⋆ ⋆

PAŽNJA! — STARI BROJEVI — U našem skladištu ima starih brojeva, i to: god. XVI, br. 4; god. XXXII, br. 3; god. XXXIII, br. 4; god. XXXIV, br. 3, 4; god. XXXV, br. 3; god. XXXVI, br. 1, 2, 3, 4; god. XXXVII, br. 1, 4; god. XXXIX, br. 1, 2, 3, 4; god. XL, br. 2, 3, 4; god. XLI, br. 1, 2, 3, 4; god. XLII, br. 3-4; god. XLIV, br. 1, 2, 3, 4; god. XLV, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVI, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVII, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVIII, br. 1, 2, 3, 4; god. XLIX, br. 1, 2, 3, 4; god. L, br. 1, 2, 3, 4; god. LI, br. 1, 2, 3, 4; god. LII, br. 1, 2, 3, 4; god. LIII, br. 1, 2, 3, 4; god. LIV, br. 1, 2, 3, 4; god. LV, br. 1, 2, 3, 4; god. LVI, br. 1, 2, 3, 4; god. LVII, br. 1, 2, 3, 4.

Cijena pojedinog broja je 5 kuna.

Izvanredni broj (E) – zadaci iz matematike (cijena 20 kn); Izvanredni broj (F) – Rječnik matematičkih naziva – hrvatski, engleski, njemački (cijena 30 kn).



Termoelektrične silicijeve nanožice

Ante Bilušić[1], *Split*

Gotovo 90% svjetskih potreba za energijom je utaženo korištenjem toplinskih strojeva čiji su izvori topline fosilna goriva (poput nafte, ugljena ili prirodnog plina). Pošto je njihova energetska učinkovitost između 30 i 40 postotaka, ogromna se količina topline gubi i odlazi u okoliš. Jedan od načina iskorištenja tako stvorene topline je uporaba termoelektričnih materijala, čija fizikalna svojstva omogućuju pretvorbu toplinske energije u električnu (i obratno). Termoelektrični materijal je opisan takozvanim faktorom dobrote, odnosno umnoškom temperature, električne vodljivosti, toplinske otpornosti i kvadratom Seebeckovog koeficijenta. Električnu vodljivost ne treba posebno objašnjavati: ona opisuje stupanj kojim promatrani materijal podupire prolazak električne struje ukoliko na njegovim krajevima postoji razlika električnog potencijala (veća električna vodljivost znači da električna struja lakše prolazi materijalom). Toplinska otpornost pak opisuje stupanj odupiranja materijala prolasku topline. Zamislimo komad nekog materijala (npr. metala) čiji su krajevi na različitim temperaturama: analogno prolasku električne struje, tako će i između krajeva materijala protjecati toplinska struja koja će na kraju dovesti do izjednačenja temperature. Uz tok topline, temperaturna razlika uzrokuje i razliku električnog potencijala: srednja energija elektrona na toplijem kraju je veća od one na hladnijem te više "toplijih" elektrona dođe u hladniji dio materijala nego obratno; posljedica je stvaranje razlike električnog potencijala. Seebeckov koeficijent nekog materijala se definira upravo kao omjer razlike stvorenog električnog potencijala i postojeće temperaturne razlike između njegovih krajeva.

Iz ovoga se da zaključiti da je termoelektrik tim bolji što mu je faktor dobrote veći, odnosno da je istovremeno i dobar električni vodič i dobar toplinski izolator. Ovaj je zahtjev teško ostvariti jer elektroni, osim što prenose naboj, prenose i toplinu. Rješenje problema leži u činjenici da toplinu, osim elektrona, prenose i titranja atoma smještenih i kristalnoj rešetci, koja pak istovremeno ne prenose i električni naboj. Stoga su znanstvenici svoju potragu za termoelektricima usmjerili upravo prema onim materijalima čija je titrajna komponenta prijenosa topline mala. Jedan od predmeta istraživanja su i takozvane nanožice – sićušne žice promjera nekoliko desetaka nanometara i duljine između jednog i stotinu mikrometara. Radi njihove specifične strukture, prijenos topline u nanožicama uslijed titranja atoma može biti bitno smanjen. Nedavno je skupina američkih znanstvenika s Kalifornijskog sveučilišta u Berkeleyu uspjela proizvesti silicijeve nanožice koje su potencijalno dobri termoelektrici [1]. Za vas ćemo pratiti razvoj daljnjih istraživanja i izvijestiti vas o daljnjem napretku.

Literatura

[1] A. I. HOCHBAUM I OSTALI, *Nature* **451** (2007) 163

[1] Autor je izvanredni profesor na Zavodu za fiziku Fakulteta prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu (bilusic@pmfst.hr).



NOVE KNJIGE

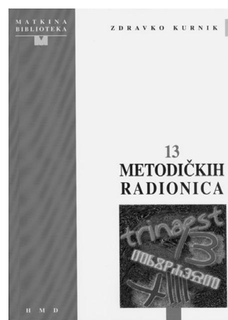
Zdravko Kurnik, 13 metodičkih radionica, Matkina biblioteka, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2007.

Odlazak u mirovinu prof. Zdravka Kurnika za njega nije značilo stvarno mirovanje već dodatni poticaj za još veću aktivnost. Između ostalog, održao je 40 metodičkih radionica za nastavnike matematike. To je rezultiralo knjižicom **13 metodičkih radionica** koja je korisna nastavnicima matematike, da bi što bolje učenicima prenijeli predviđeno gradivo.

Prema njegovim riječima: "Metodička radionica je oblik aktivnijeg sudjelovanja nastavnika matematike u vlastitom usavršavanju, s većim naglaskom na metodičkim postavkama i zakonitostima putem rada u manjim grupama nastavnika matematike."

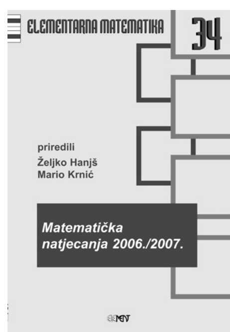
U Predgovoru je ukratko pojasnio svaku od tih radionica:

1. Matematički pojmovi. Definicije
2. Dokazivanje u nastavi matematike
3. Zadatci s više načina rješavanja
4. Osnovne konstrukcije
5. Geometrijske konstrukcije
6. Nejednakosti
7. Diofantske jednadžbe
8. Likovi i tijela
9. Preslikavanja ravnine
10. Programirana nastava
11. Dirichletovo načelo
12. Matematička križaljka
13. Matematičko otkriće



U današnje vrijeme jednom stečena znanja nisu dovoljna. Neka od tih znanja ubrzo postaju neuporabljiva pa stalno postoji potreba za novim znanjima. Tome će pripomoći i ova knjižica.

Matematička natjecanja 2006./2007. Biblioteka Elementarna matematika, Element i Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2008. (Priredili: Željko Hanjš i Mario Krnić.)



Počevši od 1995. g. izdaju se knjižice sa zadacima i rješenjima s natjecanja godinu dana ranije. Tu su sadržani zadaci s prošlogodišnjih s općinskih, županijskih i regionalnih natjecanja za učenike od 4. do 8. razreda osnovne škole i učenike iz srednjih škola. Zatim tu su i zadaci s Državnog natjecanja za učenike 7. i 8. razreda osnovne škole i iz srednjih škola. Tu su i zadaci s nekih međunarodnih natjecanja (na kojima sudjeluje Republika Hrvatska). Ove godine sadrži zadatke iz 48. međunarodne matematičke olimpijade u Vijetnamu, 10. mediteranskog matematičkog natjecanja i 1. srednjoeuropskog matematičkog natjecanja u Eisenstadtu u Austriji.

Ove knjižice su od posebnog značenja za pripremu učenika za matematička natjecanja, a isto tako su od velike koristi nastavnicima za izbor zadataka za rad s učenicima.

Branimir Dakić, Ispiti znanja iz matematike za 1. razred gimnazije, Element, Zagreb, 2007. i **Ispiti znanja iz matematike za 2. razred gimnazije**, Element, Zagreb, 2008.

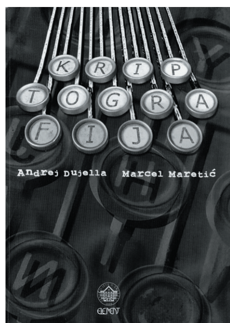


U toku stjecanja zanja i iz matematike povremeno se provode provjere znanja, najčešće pismenim putem. Obično se stavljaju teži zadaci koji ne daju jasan uvid u stvarno znanje učenika. Udžbenici N. Elezovića i B. Dakića za 1. i 2. razred srednje škole sadrže mnoštvo riješenih primjera i veći broj zadataka za vježbu. Iako raznovrsni, ti su zadaci standardni i u obliku i po sadržaju. Ove dvije male zbirke sadrže drukčiju vrstu zadataka u kojima između četiri ponuđena odgovora treba izabrati točno rješenje.

Zadaci višestrukog izbora su pouzdaniji i daju realniju sliku o znanju učenika. U ovim knjižicama je za svako poglavlje, a koja prate udžbenike za 1. i 2. razred gimnazije, zadano po šest ispita. Za 1. razred u devet tema zadano je po šest ispita s po 16 zadataka, pri čemu je zadnja tema namijenjena završnom ispitu. Za 2. razred obrađeno je šest tema s po šest testova od kojih svaki ima po 12 zadataka, a na kraju je još šest testova, s po 16 zadataka, za godišnji ispit, koji sadrži zadatke iz svakog poglavlja.

Ove dvije zbirke zadataka namijenjene su provjeri znanja učenika i dobro će pripomoći kao dodatna literatura za lakše usvajanje znanja iz matematike u 1. i 2. razredu gimnazija.

Andrej Dujella i Marcel Maretić, Kriptografija, Element, Zagreb, 2007.



Prije desetak godina uveden je na PMF-Matematičkom odjelu kao izborni predmet *Kriptografija*, koji je privukao veliko zanimanje studenata tako da ga posljednjih godina upisuje njih preko 200.

Želja i potreba za sigurnim komuniciranjem postojala je od davnina. Iako su se kroz stoljeća načini prenošenja poruka uvelike unaprijedili, osnovni problem zapravo je ostao isti, a to je kako onemogućiti onoga tko želi nadzirati komunikacijski kanal, kojim se prenosi poruka, da dozna njezin sadržaj. *Kriptografija* je znanstvena disciplina koja se bavi proučavanjem upravo tog problema.

Kroz povijest su se njezine metode usavršavale, ali su se istovremeno otkrivale mogućnosti prodiranja u tajne poruke. Tek je 70-tih godina 20. stoljeća izgrađen način šifriranja koji omogućuje sigurnije slanje tajnih poruka.

Ova knjiga nastala je na osnovi *on-line* skripte iz kolegija *Kriptografija* (dostupne na internetskoj stranici `http://www.math.hr/~duje/kript.html`). U knjizi su sva poglavlja znatno proširena. Do sada je već većem broju studenata skripta poslužila kao osnovna ili dodatna literatura za izradu diplomskih ili magistarskih radova.

Knjiga je prvenstveno namijenjena studentima matematike, ali će ona zasigurno imati znatno šire čitateljstvo. Za čitanje je potrebno predznanje matematike na nivou prve godine studija matematičkih, prirodoslovnih ili tehničkih fakulteta.

Željko Hanjš, Zagreb



Zadaci s prijemnog ispita iz matematike na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu 2007. g.

Donosimo tek manji dio zadataka namijenjenih svim zainteresiranim kandidatima koji se žele pripremiti za razredbeni (kvalifikacijski) ispit na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu i svim srodnim fakultetima u Hrvatskoj.

⋆ ⋆ ⋆

M-1. Koliko iznosi $\frac{9}{28}\%$ od $\dfrac{144\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^3+81\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)^3}{3^{-3}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}$?

A. 0.1 **B.** 0.2 **C.** 0.3 **D.** 0.4

M-2. Pojednostavnite $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{a}{xy}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}-\frac{a^2}{x^2y^2}}\cdot(a+x+y)$.

A. a **B.** a^2 **C.** xy **D.** x^2y^2

M-3. Uz pretpostavku da $a \notin \{1,-1\}$, riješite jednadžbu $\dfrac{a+\frac{x}{1-a}}{a-\frac{x}{1+a}}=\dfrac{1+a}{1-a}$.

A. a **B.** a^2 **C.** a^3 **D.** a^4

M-4. Zbroj dvaju brojeva jednak je 30, a razlika njihovih kvadrata 120. Razlika tih brojeva jednaka je:
A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

M-5. Za koje vrijednosti koeficijenta k pravac $y = kx$ mimoilazi kružnicu $x^2+y^2-6x-6y+9=0$?
A. 0 **B.** 1 **C.** $\langle 0,+\infty\rangle$ **D.** $\langle -\infty,0\rangle$

M-6. Kvadratna jednadžba čije je jedno rješenje $1+i$, glasi:
A. $x^2-2x-2=0$ **B.** $x^2+2x-2=0$
C. $x^2+2x+3=0$ **D.** $x^2-2x+2=0$

M-7. Neki posao 20 radnika obavi za 12 dana. Koliko je radnika potrebno da isti posao bude završen u 8 dana?
A. 25 **B.** 30 **C.** 33 **D.** 35

M-8. Inverzna funkcija funkcije $f(x) = 2\log_2(2x)$ je:
A. $f^{-1}(x) = 2^{\frac{x-2}{2}}$ **B.** $f^{-1}(x) = 2^{x-2}$ **C.** $f^{-1}(x) = 2^{x-1}$ **D.** $f^{-1}(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

M-9. Površina trokuta, kojeg pravac $2x - 3y + 6 = 0$ zatvara s koordinatnim osima je:
A. 2 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 2.5

M-10. Rješenje nejednadžbe $-x^2 + 3x - 2 \geqslant 0$ je:
A. $\langle 1, 2\rangle$ **B.** $[1, 2]$ **C.** $\{1, 2\}$ **D.** $\mathbf{R}$

M-11. Ako točke $A(6, 4)$ i $B(-8, 3)$ leže na elipsi, jednadžba te elipse je:
A. $x^2 + 4y^2 = 100$ **B.** $4x^2 + y^2 = 100$ **C.** $x^2 + y^2 = 25$ **D.** $25x^2 + y^2 = 25$

M-12. Rješenje sustava eksponencijalnih jednadžbi

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$$

je sljedeći uređeni par realnih brojeva:
A. $\left(\frac{14}{3}, 1\right)$ **B.** $\left(\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right)$ **C.** $(3, 14)$ **D.** $(14, 3)$

M-13. Rješenje logaritamske jednadžbe $\frac{\log x - 1}{\log x + 3} + \frac{\log x - 3}{\log x + 1} = 2$ je sljedeći realan broj:
A. 0.01 **B.** 0.02 **C.** 0.03 **D.** 0.04

M-14. Udvostručimo li polumjer kruga, njegova će se površina povećati:
A. 2 puta **B.** 3 puta **C.** 4 puta **D.** 6 puta

M-15. Ako dijagonalu kocke smanjimo za 10%, oplošje kocke će se smanjiti za:
A. 19% **B.** 20% **C.** 21% **D.** 22%

M-16. Površine dvaju sličnih trokuta su $P_1 = 256\ \text{cm}^2$ i $P_2 = 576\ \text{cm}^2$, dok je opseg manjeg trokuta 60 cm. Opseg većeg trokuta je:
A. 75 cm **B.** 90 cm **C.** 105 cm **D.** 135 cm

M-17. Koliko ima parnih peteroznamenkastih brojeva čija je bar jedna znamenka 7?
A. 90 000 **B.** 45 000 **C.** 29 160 **D.** 15 840

M-18. Nakon što tvrtka uplati porez od 42%, isplaćuje djelatniku 4 640 kn. Bruto zarada tog djelatnika je:
A. manja od 8 000 kn **B.** 8 000 kn **C.** 11 047.62 kn **D.** veća od 11 047.62 kn

M-19. Ako se 1 CHF (švicarski franak) u Zagrebu može kupiti za 4.75 HRK (hrvatskih kuna), a 1 EUR (euro) za 7.32 HRK, koliko se švicarskih franaka može kupiti za 5 000 EUR?
A. 10 787 CHF **B.** 7 705 CHF **C.** 3 245 CHF **D.** 1 053 CHF

M-20. Tri osobe zajedno uplaćuju LOTO. Osoba A uplatila je 400 kn, osoba B 600 kn te osoba C 500 kn. Zajednički dobitak je 900 000 kn. Koliko pripada osobi B?
A. 360 000 kn **B.** 480 000 kn **C.** 540 000 kn **D.** 810 000 kn

M-21. Izračunajte $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots+\frac{1}{2\,756}$.

A. $\frac{49}{212}$ **B.** $\frac{49}{213}$ **C.** $\frac{49}{214}$ **D.** $\frac{49}{215}$

M-22. Odredite vrijednost izraza $\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{81}a^4-\frac{1}{54}a^3b+\frac{1}{36}a^2b^2-\frac{1}{24}ab^3+\frac{1}{16}b^4\right)$ za $a=3$ i $b=2$.

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$

M-23. Izračunajte $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}}$.

A. $\left(25+\sqrt{2}\right)^{-1}$ **B.** $\left(25-\sqrt{2}\right)^{-1}$ **C.** $25+\sqrt{2}$ **D.** $25-\sqrt{2}$

M-24. Brzi vlak prijeđe udaljenost između gradova A i B za 4 sata, a nagibni vlak za 2.5 sata. Ako je prosječna brzina nagibnog vlaka za 50 km/h veća od prosječne brzine brzog vlaka, udaljenost gradova A i B je:

A. manja od 300 km **B.** između 301 i 325 km

C. između 326 i 350 km **D.** između 351 i 375 km

M-25. Za koje vrijednosti koeficijenta $k \in \mathbf{R}$ pravac $y=kx$ dodiruje kružnicu $(x-10)^2+(y-10)^2=100$

A. $\{0\}$ **B.** ne postoji takav k **C.** $\langle 0,+\infty\rangle$ **D.** $\langle -\infty,0\rangle$

M-26. Ako 120 radnika, radeći 2 mjeseca po 9 sati dnevno, iskopa kanal dug 3 km, koliko će trajati dok ista ekipa, radeći po 8 sati dnevno, iskopa kanal dug 5 km?

A. 3 mjeseca **B.** $4\frac{1}{2}$ mjeseca **C.** 6 mjeseci **D.** $3\frac{3}{4}$ mjeseci

M-27. Ako je $f\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$, tada je $f(x)$ jednako:

A. x^2-1 **B.** x^2-2 **C.** $2(x^2-1)$ **D.** $2(x^2-2)$

M-28. Jednadžba pravca koji je okomit na simetralu prvog i trećeg kvadranta, a prolazi ishodištem, glasi:

A. $x+y+2=0$ **B.** $x+y=0$ **C.** $2x+3y+4=0$ **D.** $x-y=0$

M-29. Za koji $m \in \mathbf{R}$ jednadžba $5x^2+2x+m=0$ ima konjugirano kompleksna rješenja?

A. $m>\frac{1}{5}$ **B.** $m<\frac{1}{5}$ **C.** $m=\frac{1}{5}$ **D.** ne postoji takav m

M-30. Rješenje nejednadžbe $-x^2+2x-2\geqslant 0$ je:

A. $\emptyset$ **B.** $[-2,2]$ **C.** $\langle -2,2\rangle$ **D.** $\langle -1,1\rangle$

M-31. Jednadžba hiperbole koja prolazi točkama $A(-5,1)$ i $B(7,-5)$ glasi:

A. $x^2-3y^2=24$ **B.** $x^2-y^2=8$ **C.** $x^2-y^2=24$ **D.** $3x^2-y^2=24$

M-32. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 3\,125 \\ 5^x + 5^y = 150 \end{cases}$$

A. $\{(2,3),(3,2)\}$ **B.** $\{(4,3),(3,4)\}$ **C.** $\{(4,5),(5,4)\}$ **D.** $\{(1,3),(3,1)\}$

M-33. Rješenje jednadžbe $\log_2(2^x - 3) = 2 - x$ je:
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

M-34. Ako se stranice dvaju kvadrata odnose kao $2:3$, njihove se površine odnose kao:
A. 2 : 3 **B.** 4 : 9 **C.** 8 : 27 **D.** 16 : 81

M-35. Smanjimo li svaku od stranica kvadra za 10%, volumen kvadra će se smanjiti za
A. 15% **B.** 27.1% **C.** 30% **D.** 37.1%

M-36. Kateta a odnosi se prema hipotenuzi c pravokutnog trokuta kao $3:5$. Opseg tog trokuta je 48 cm. Površina trokuta iznosi:
A. 96 cm^2 **B.** 100 cm^2 **C.** 120 cm^2 **D.** 192 cm^2

M-37. Koliki je broj točaka u ravnini, kojima može biti određeno najviše 2 556 pravaca?
A. 1 278 **B.** 639 **C.** 144 **D.** 72

M-38. Cijena automobila povećana je za 5%, a nakon toga smanjena za 5% i sada iznosi 20 000 €. Prije navedenih promjena cijena je bila:
A. 20 000 € **B.** između 20 001 € i 20 100 €
C. manje od 20 000 € **D.** više od 20 101 €

M-39. Djelatnik A radio je 240 sati, a izostao 12 sati, djelatnik B radio je 220 sati, a izostao 11 sati, djelatnik C radio je 240 sati, a izostao 48 sati s posla. Kako će biti plaćen radnik C ako je ukupno na raspolaganju iznos 31 500 kn?
A. 3 500 kn **B.** 4 500 kn **C.** 5 500 kn **D.** 6 500 kn

M-40. Za koliko bi godina iznos od 160 000 kn, uz godišnji kamatnjak 4, donio 6 400 kn ukupnih kamata? Obračun kamata je godišnji, jednostavan i dekurzivan.
A. 1 godinu **B.** 2 godine **C.** 3 godine **D.** 4 godine

Rješenja zadataka

M–1	A	M–2	C	M–3	B	M–4	C
M–5	D	M–6	D	M–7	B	M–8	A
M–9	B	M–10	B	M–11	A	M–12	B
M–13	A	M–14	C	M–15	A	M–16	B
M–17	D	M–18	B	M–19	B	M–20	A
M–21	A	M–22	B	M–23	D	M–24	C
M–25	A	M–26	D	M–27	D	M–28	B
M–29	A	M–30	A	M–31	C	M–32	A
M–33	C	M–34	B	M–35	B	M–36	A
M–37	D	M–38	B	M–39	A	M–40	A

Rješenje nagradnog natječaja br. 181

Rješenje. Površina trokuta ABC je jednaka polovici produkta duljine stranice $\overline{AB}$, koja je fiksna, i duljine visine iz C na $\overline{AB}$, koja je promjenjiva. Duljina visine je jednaka udaljenosti točke C od pravca AB. Jednadžba pravca AB je $y = 5x - 10$ i on ne siječe parabolu $y = x^2$. Točka $C(x, x^2)$ koja minimizira površinu trokuta je ona u kojoj tangenta paralelna s AB dodiruje parabolu. Njezina jednadžba je $y = 5x + l$, a zbog $y = x^2$, dobivamo $x^2 - 5x - l = 0$, tj. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + l - \frac{25}{4} = 0$. Kako tangenta ima samo jednu dodirnu točku s parabolom, mora biti $x = \frac{5}{2}$, pa je tražena točka $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

Knjigom su nagrađeni rješavatelji:

1. *Edin Ajanović* (3), Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH; 2. *Mario Berljafa* (4), Tehnička škola Pula, Pula; 3. *Kristijan Kvaternik* (1), V. gimnazija, Zagreb; 4. *Vedran Rafaelić* (4), Opća gimnazija, SŠ Vladimira Gortana, Buje; 5. *Šimun Romić* (4), Gimnazija Metković, Metković.

Riješili zadatke iz br. 2/230

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Edin Ajanović* (3), I. bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH, sve; *Mario Berljafa* (4), Tehnička škola Pula, Pula, 3085, 3086, 3090; *Gabrijel Guberović* (3), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 3078; *Kristijan Kvaternik* (1), V. gimnazija, Zagreb, 3083; *Amela Mehak* (2), Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH, 3088; *Vedran Rafaelić* (4), Opća gimnazija, SŠ Vladimira Gortana, Buje, 3077, 3078, 3080–3086, 3088, 3090; *Vanja Ubović* (2), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 3077, 3079, 3081, 3083.

b) Iz fizike: *Ivan Kulušić* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 271–273; *Mario Berljafa* (4), Tehnička škola Pula, Pula, 1378, 1381; *Gabrijel Guberović* (3), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 1378, 1379, 1383, 1384; *Kristijan Kvaternik* (1), V. gimnazija, Zagreb, 1378, 1380; *Vanja Ubović* (2), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 1378, 1384.

Nagradni natječaj br. 183

Nađi x i y tako da vrijedi

$$\binom{100}{0} + 2\binom{100}{1} + 2^2\binom{100}{2} + \ldots + 2^{100}\binom{100}{100} = x^y.$$

SADRŽAJ LVIII. GODIŠTA

ČLANCI IZ MATEMATIKE

2. ČLANCI IZ FIZIKE

3. INFORMATIKA

4. IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

5. ASTRONOMIJA

6. ZABAVNA MATEMATIKA

7. ZADACI I RJEŠENJA

8. ZANIMLJIVOSTI

9. IZ SVIJETA ZNANOSTI

10. KVALIFIKACIJSKI ISPITI

11. NOVE KNJIGE

12. NAGRADNI NATJEČAJ

Dvostruka stranica

Zadnja strana omota